Riprendiamo l'approssimazione.
Consideriamo $m+1$ punti (x_i, y_i), $i = 0, \dots, m$ e la retta $y = a_1 x + a_0$ che approssima ai minimi quadrati.
Allora, a_1 e a_0 verificano il sistema

$$\begin{cases} a_0 (m+1) + a_1 \sum_{i=0}^{m} x_i = \sum_{i=0}^{m} y_i \\ a_0 \sum_{i=0}^{m} x_i + a_1 \sum_{i=0}^{m} x_i^2 = \sum_{i=0}^{m} x_i y_i \end{cases}$$

Definiamo come **BARICENTRO** degli $m+1$ punti il punto $G = (x_G, y_G)$ dato da

$$x_G = \frac{\sum_{i=0}^{m} x_i}{m+1}, \qquad y_G = \frac{\sum_{i=0}^{m} y_i}{m+1}$$

Il baricentro G appartiene sempre alla retta $y = a_1 x + a_0$: infatti, dalla 1ª eq. del sistema, dividendo per $m+1$ abbiamo

$$a_0 + a_1 \frac{\sum_{i=0}^{m} x_i}{m+1} = \frac{\sum_{i=0}^{m} y_i}{m+1} \qquad \text{ossia}$$

$$a_0 + a_1 x_G = y_G$$

per cui G appartiene a $y = a_1 x + a_0$.

ESEMPIO Scrivere la retta di approssimazione ai minimi quadrati associata ai punti

$P_0 = (-2, 1)$; $P_1 = (2, 1)$; $P_2 = (2, 3)$; $P_3 = (1, -1)$

$3 \to m$

Sia $y = a_1 x + a_0$ la retta richiesta i cui coefficienti verificano

$$\begin{cases} 4 a_0 + 3 a_1 = 4 \\ 3 a_0 + 13 a_1 = 5 \end{cases}$$

$5 = -2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1)$

Risolvendolo si trova $a_0 = \frac{37}{43}$, $a_1 = \frac{8}{43}$ per cui la retta cercata è

$$y = \frac{8}{43} x + \frac{37}{43}.$$

Calcoliamo la quantità $d = \sum_{i=0}^{m} [(a_1 x_i + a_0) - y_i]^2$; si trova

Calcoliamo la quantità $d = \sum_{i=0}^{m} \left[(a_1 x_i + a_0) - y_i \right]^2$; si trova

$$d = \sum_{i=0}^{3} \left[\left(\frac{8}{43} x_i + \frac{37}{43} \right) - y_i \right]^2 = \frac{14104}{43^2} \approx 7.7$$

<u>Verifichiamo</u> che G appartiene a $y = \frac{8}{43} x + \frac{37}{43}$.

$$x_G = \frac{\sum_{i=0}^{m} x_i}{m+1} = \frac{-2+2+2+1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=0}^{m} y_i}{m+1} = \frac{1+1+3+(-1)}{4} = 1$$

per cui risulta

$$\frac{8}{43} x_G + \frac{37}{43} = \frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{43} \cdot \frac{3}{\cancel{4}} + \frac{37}{43} = \frac{43}{43} = 1 = y_G .$$

<u>INTEGRAZIONE NUMERICA</u> (QUADRATURA)

Si occupa di calcolare (eventualmente in modo approssimato) integrali DEFINITI del tipo

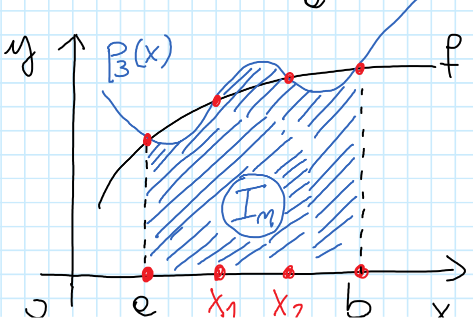
$$I = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{con} \quad a < b$$

ed f abbastanza regolare in $[a,b]$ per cui l'integrale esista. La teoria può anche essere estesa al calcolo di integrali impropri (anche su intervalli illimitati). Noi non vedremo questo.

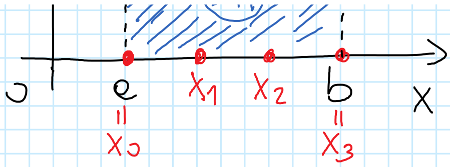
L'idea per calcolare I è la seguente: approssimiamo f con il polinomio che la interpola nei nodi x_i, $i = 0, \dots, n$ di $[a,b]$:

$p_n(x)$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p_n(x)\,dx = I_n$$



C'è un errore ed è necessario avere delle strategie per controllarlo.



Vediamo che aspetto assume I_n esprimendo il polinomio di interpolazione $p_n(x)$ secondo Lagrange:

$$I_n = \int_a^b p_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, l_i(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b l_i(x)\,dx$$

dipende solo dai nodi x_i!

$$= \sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)} f(x_i)$$

dove $\quad A_i^{(n)} = \int_a^b l_i(x)\,dx \;, \quad i = 0, \dots, n.$

Notiamo che la formula che dà I_n

(1) è esatta per ogni polinomio di grado al più n.

(2) ha gli $A_i^{(n)}$ che dipendono solo dalla scelta dei nodi x_i.

Inoltre,

$$\sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)} = b-a$$

perché

(è una delle proprietà dei polinomi di Lagrange)

$$\sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \int_a^b l_i(x)\,dx = \int_a^b \overbrace{\left(\sum_{i=0}^{n} l_i(x)\right)}^{=1} dx = \int_a^b 1 \cdot dx = b-a$$

GENERALIZZIAMO QUESTA IDEA.

Per calcolare

$$I = \int_a^b w(x) \cdot f(x)\,dx$$

dove $w(x)$, detta funzione peso, con $w(x) > 0$ in $[a,b]$ usiamo delle formule, dette FORMULE DI QUADRATURA, del tipo

$$I_n = \sum_{i=0}^{n} w_i\, f(x_i)$$

dove w_i sono i PESI della formula e gli x_i sono i NODI della formula. Perciò, abbiamo

$$I = \int_a^b w(x) f(x)\,dx \approx \boxed{\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) = I_n}$$

In generale, $I \neq I_n$ e c'è l'errore

$$E = I - I_n$$

di cui interessa, in realtà, una maggiorazione di $|E|$.

Nel caso delle formule di quadratura è consuetudine descrivere l'accuratezza della formula con la seguente definizione.

DEF. La formula di quadratura

$$I_n = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

ha ordine o GRADO DI PRECISIONE $r \in \mathbb{N}$ se

(i) è esatta (ossia, $I_n = I$) per tutti i polinomi di grado al più r;

(ii) esiste almeno un polinomio di grado $r+1$ per il quale la formula non è esatta (ossia, $I_n \neq I$).

Si può dimostrare che la formula $I_n = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$ ha ordine al più $2n+1$ ottenibile con una scelta opportuna di pesi e nodi. Queste formule sono dette formule di QUADRATURA GAUSSIANA. Ad esempio,

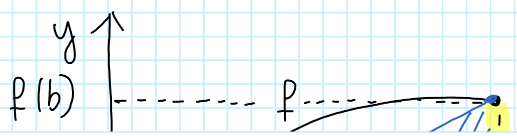
$$\int_{-1}^{1} w(x) f(x)\,dx \cong \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

con w_i e x_i dati da tabelle per vari valori di n (NON troppo grande).

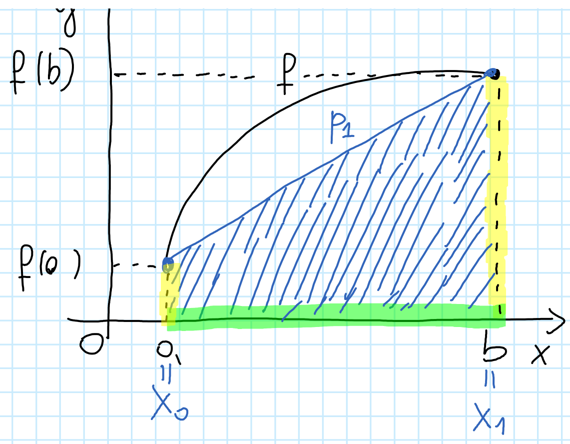
FORMULE DI QUADRATURA ELEMENTARI

Ricaviamo una prima formula di quadratura geometricamente.

FORMULA DEI TRAPEZI.



Approssimo f con un polinomio di 1° grado con nodi $x_0 = a$, $x_1 = b$. Pertanto, geometricamente, ho



di 1° grado con nodi $x_0 = a$, $x_1 = b$. Pertanto, geometricamente, ho

$$I_T = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) = \frac{b-a}{2} f(a) + \frac{b-a}{2} f(b) = w_0 \cdot f(x_0) + w_1 f(x_1)$$

Queste formule di quadratura, che è consuetudine scrivere come

$$\boxed{I_T = \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]}$$

ha ordine $r = 1$ (cioè è esatta per tutti i polinomi di grado al più 1, risultato ovvio perché un polinomio di grado 1 è una retta e noi abbiamo approssimato la funzione con una retta interpolante).

In generale, se f NON è polinomio di grado 1 c'è un errore $E_T = I - I_T$. Si può dimostrare che se $f \in C^2([a,b])$ allora risulta

$$E_T = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$$

derivata seconda

dove ξ è un opportuno (e, in generale, NON noto né determinabile) punto di (a, b).

ESERCIZIO Calcolare

(i) $\int_0^1 x^3 dx$ (ii) $\int_{-1}^1 x^3 dx$

usando la formula dei trapezi. Inoltre valutare i relativi errori. Infine, per (i), calcolare anche ξ della formula che dà l'errore.