Esercizi riguardanti limiti di successioni e di funzioni

Davide Boscaini

Queste sono le note da cui ho tratto le esercitazioni del giorno 10 Novembre 2011. Come tali sono ben lungi dall'essere esenti da errori, invito quindi chi ne trovasse a segnalarli presso davide.boscaini@studenti.univr.it.

La scorsa lezione abbiamo visto che, se vogliamo dimostrare un certo enunciato $\mathcal{P}(n)$, uno strumento molto utile è il *principio di induzione*, il quale afferma che

Teorema 1 (Principio di induzione)**.** *Se $\mathcal{P}(1)$ è vero e per ogni $n \geq 2$,*

$$\textit{se } \mathcal{P}(n-1) \textit{ è vero, allora anche } \mathcal{P}(n) \textit{ è vero,}$$

allora l'enunciato $\mathcal{P}(n)$ è vero per ogni $n \geq 2$.

Esercizio 1. Calcolare, se esiste, il limite della seguente successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}, \\ a_0 = -2. \end{cases}$$

Soluzione. Per prima cosa, per capire come funziona la definizione per ricorrenza di una successione, proviamo a calcolarne alcuni valori

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{4} = 2, \\ a_2 &= \sqrt{8} \approxeq 2.83, \\ a_3 &= \sqrt{\sqrt{8} + 6} \approxeq 2.97, \\ a_4 &= \dots \end{aligned}$$

Nonostante il fatto che a noi interessa *sempre* il comportamento definitivo di una successione, e cioè fissato un certo $N \in \mathbb{N}$, cosa succede ad a_n per $n > N$, possiamo affermare che, almeno a prima vista, sembra che abbiamo a che fare con una successione crescente. È proprio così? Vogliamo dimostrare che

$$a_{n+1} > a_n.$$

Per far ciò ci sono (almeno) due modi:

- Per definizione $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$, quindi la precedente condizione diventa

  $$\sqrt{a_n + 6} > a_n,$$

  e, visto che, per come è stata definita, $a_n + 6 > 0$ per ogni $n \geq 1$, questo equivale a

  $$a_n + 6 > a_n^2.$$

Dalla precedente disequazione ricaviamo la condizione

$$a_n^2 - a_n - 6 < 0,$$

che ha soluzione $-2 < a_n < 3$, poiché $y = x^2 - x - 6$ è una parabola rivolta verso l'alto che taglia l'asse delle ascisse in $x_1 = -2$ ed $x_2 = 3$. Come già osservato, la successione a_n contiene termini positivi per ogni $n \geq 1$, ma visto che a noi interessa il comportamento definitivo, questo non ci dà problemi. Possiamo quindi limitare la soluzione ad $a_n < 3$: abbiamo appena trovato che la successione è crescente se $a_n < 3$.

Se ora dimostrassimo che a_n è sempre minore di 3, avremmo dimostrato che, nell'intervallo dove la successione assegnata è crescente, essa è anche limitata superiormente. Ma allora grazie al teorema 1 visto la lezione scorsa, monotonia più limitatezza ci permettono di concludere che la successione ammette limite finito L, $L \leq 3$.

- Procediamo per induzione. La proposizione che vogliamo dimostrare è $\mathcal{P}(n) =$"$a_{n+1} > a_n$". *Caso base*:

$$2 = a_1 = \sqrt{a_0 + 6} > a_0 = -2.$$

Passo induttivo: supponiamo che valga $\sqrt{a_n + 6} > a_n$ e vogliamo dimostrare che questo implica che $\sqrt{a_{n+1} + 6} > a_{n+1}$. Per definizione, questo equivale a

$$\sqrt{\sqrt{a_n + 6} + 6} > \sqrt{a_n + 6},$$

cioè

$$\begin{cases} \sqrt{a_n + 6} + 6 > a_n + 6, \\ \sqrt{a_n + 6} + 6 \geq 0, \\ \sqrt{a_n + 6} \geq 0. \end{cases}$$

Si vede subito che la terza e quarta condizione sono sempre verificate, e se semplifichiamo il 6 da ambo i membri della prima, ritroviamo

$$\sqrt{a_n + 6} > a_n,$$

che è proprio l'ipotesi induttiva, vera per ipotesi. L'enunciato $\mathcal{P}(n)$ è stato quindi provato per ogni $n \geq 1$, quindi la successione è crescente.

Passiamo ora alla dimostrazione della limitatezza superiore. In particolare dai calcoli precedenti sappiamo che 3 è un buon candidato come estremo superiore. Dimostriamo quindi, sempre per induzione, la proposizione $\mathcal{P}(n) =$ "$a_n \leq 3$". *Caso base*:

$$a_1 = 2 \leq 3.$$

Passo induttivo: supponiamo che l'enunciato sia vero per n e cioè che valga $a_n \leq 3$ e dimostriamo che questo implica che $a_{n+1} \leq 3$. Per prima cosa notiamo che, se $a_n \leq 3$ allora

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6} \leq \sqrt{3 + 6} = 3,$$

e abbiamo così quindi trovato che la proposizione $\mathcal{P}(n)$ è valida per ogni $n \geq 1$.

Ma allora per il teorema 1 della scorsa lezione, sappiamo che la successione a_n ammette limite finito L, $L \leq 3$.

Ora se

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = L,$$

anche

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = L,$$

ma allora dall'equazione di ricorrenza troviamo

$$L = \sqrt{L+6},$$

cioè $L^2 - L - 6 = 0$, che ammette soluzioni

$$L_1 = -2, \quad L_2 = 3.$$

Ora $a_n > 0$ per ogni $n \geq 1$, quindi possiamo scartare L_1, trovando così

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 3.$$

Esercizio 2. Calcolare, se esiste, il limite della successione

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{1+n} - \sqrt[3]{n}.$$

Soluzione. Si riconosce subito che questa è una forma indeterminata del tipo $+\infty - \infty$. Ricordando quanto detto la scorsa lezione ci ricordiamo che, una possibilità per togliere l'indeterminazione nel caso in cui si abbia a che fare con radici, è quella di razionalizzare. Ricordando quindi che

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

ponendo

$$a = \sqrt[3]{n+1} \text{ e } b = \sqrt[3]{n},$$

troviamo

$$\lim_{n\to+\infty} (a-b)\frac{a^2+ab+b^2}{a^2+ab+b^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2},$$

quindi

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{1+n} - \sqrt[3]{n} &= \lim_{n\to+\infty} (\sqrt[3]{1+n} - \sqrt[3]{n})\frac{\sqrt[3]{(1+n)^2} + \sqrt[3]{1+n}\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{(1+n)^2} + \sqrt[3]{1+n}\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n^2}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1+n-n}{\sqrt[3]{(1+n)^2} + \sqrt[3]{1+n}\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n^2}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(1+n)^2} + \sqrt[3]{1+n}\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n^2}}.
\end{aligned}$$

Ora tramite opportune semplificazioni si arriva a

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(1+n)^2} + \sqrt[3]{1+n}\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n^2}} \sim \frac{1}{n^{2/3}},$$

e dal momento che $2/3 > 0$, possiamo concludere che il limite converge a 0.

Esercizio 3. Calcolare, se esiste, il limite della successione

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n + n^2}{5^n + n^3}.$$

Soluzione. Siamo di fronte ad una forma indeterminata di tipo $+\infty/+\infty$, quindi l'istinto ci porta a raccogliere da numeratore e denominatore il termine di grado maggiore,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{5^n} \frac{1+n^2/3^n}{1+n^3/5^n}.$$

Ora, grazie alla proprietà delle potenze, possiamo riscrivere il limite precedente come

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n \frac{1+n^2/3^n}{1+n^3/5^n}$$

dove $3/5 < 1$, quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0.$$

Ricordando poi che le potenze hanno ordine di infinito maggiore dei polinomi, possiamo concludere che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{3^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{5^n} = 0,$$

di conseguenza il limite assegnato converge a 0.

Esercizio 4. Calcolare, se esiste, il limite della successione

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{3+n}\right)^{5n}.$$

Soluzione. Abbiamo ancora a che fare con la forma indeterminata $+\infty/+\infty$. Se però riscriviamo il limite assegnato come

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1+3/n}\right)^{5n}$$

possiamo notare una certa somiglianza con il limite notevole

$$\lim_{m\to+\infty} \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e.$$

Inoltre

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1+3/n}\right)^{5n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{3}{n}\right)^{5n}},$$

quindi possiamo limitarci a studiare il limite del solo denominatore. In questo modo troviamo

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n/3}\right)^{5n} &= \lim_{n\to+\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n/3}\right)^{n/3}\right)^{15} \\
&= \left(\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n/3}\right)^{n/3}\right)^{15} \\
&= \left(\lim_{m\to+\infty} \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right)^{15} \\
&= e^{15},
\end{aligned}$$

cioè il denominatore tende ad e^{15}. Segue allora che il limite assegnato converge a e^{-15}.

Esercizio 5. Calcolare, se esiste, il limite della successione

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

Soluzione. Ricordando la definizione di fattoriale

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1,$$

un comodo modo per capire a cosa tende la successione di termine generale $a_n = n!/n^n$ è il seguente

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\dots\frac{2}{n}\frac{1}{n},$$

quindi in ogni termine il denominatore è di un ordine maggiore o uguale del numeratore. Segue quindi che il limite assegnato converge a 0.

Esercizio 6. Calcolare, se esiste, il limite della successione

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!}.$$

Soluzione. Per studiare il limite assegnato è utile ricordarsi la seguente

Proposizione (Formula di Stirling). *Per valori grandi di n vale possiamo approssimare $n!$ con*

$$\sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n},$$

cioè

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n}.$$

☞ Wikipedia dice: ad esempio per $n = 30$ la formula fornisce l'approssimazione 2.6452×10^{32}, mentre il valore preciso sarebbe 2.6525×10^{32}, in questo caso si ha una discrepanza minore dello 0.3 %.

Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}\,\frac{n^n}{e^n}} = \frac{n}{e}\sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}} = \frac{n}{e}\sqrt[2n]{2\pi n}$$

e quindi abbiamo ricondotto lo studio del limite assegnato al calcolo del limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to+\infty} n^{1/n},$$

che è una forma indeterminata del tipo $+\infty^0$. Come vi è stato insegnato a lezione, notiamo che

$$\sqrt[n]{n} = n^{1/n} = e^{\log\left(n^{1/n}\right)} = e^{\frac{\log n}{n}},$$

e ora, grazie alla gerarchia degli infiniti, possiamo concludere che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\log n}{n}} = e^{\lim_{n\to+\infty}\frac{\log n}{n}} = e^0 = 1.$$

Ma allora il limite assegnato diverge a $+\infty$ in quanto prodotto tra una quantità, n/e, che al crescere di n tende a $+\infty$, ed una quantità,

$$\sqrt[2n]{2\pi n} = \left(\sqrt[2\pi n]{2\pi n}\right)^{\pi} = \left(\sqrt[m]{m}\right)^{\pi},$$

posto $m = 2\pi n$, che al crescere di n (e quindi di m), tende ad $1^\pi = 1$.

Esercizio 7. Calcolare, se esiste, il limite della successione

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n!}\right)^n.$$

Soluzione. In questo caso abbiamo una forma indeterminata di tipo $1^{+\infty}$ e la tentazione di ricondurre il limite assegnato al limite notevole

$$\lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$

è troppo forte. In particolare

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n!}\right)^n &= \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n!}\right)^{n!}\right)^{1/(n-1)!}\\
&= \left(\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n!}\right)^{n!}\right)^{\lim_{n\to+\infty}1/(n-1)!}\\
&= e^0 = 1.
\end{aligned}$$

Esercizio 8. Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos x-1}-\cos x}{\sin^2 x}.$$

Soluzione. Per prima cosa notiamo che il limite assegnato è una forma indeterminata del tipo 0/0, infatti

$$\lim_{x\to 0}\cos x = 1,$$
$$\lim_{x\to 0}e^{\cos x-1} = e^{\lim_{x\to 0}(\cos x-1)} = e^{(1-1)} = e^0 = 1,$$
$$\lim_{x\to 0}\sin^2 x = 0.$$

Per risolvere questo limite tentiamo di ricondurci al limite notevole

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1.$$

Per far questo ci ricordiamo che $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ e sommiamo e sottraiamo 1 al numeratore, ottenendo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos x-1}-\cos x+1-1}{1-\cos^2 x} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos x-1}-1}{1-\cos^2 x}+\frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos x-1}-1}{(1-\cos x)(1+\cos x)}+\frac{1}{1+\cos x}\\
&= \lim_{x\to 0}-\frac{e^{\cos x-1}-1}{\cos x-1}\frac{1}{1+\cos x}+\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\\
&= -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Quando padroneggeremo bene anche le derivate, avremo a disposizione strumenti nuovi e più potenti, come ad esempio la *regola di de l'Hopital*, grazie alla quale potevamo calcolare questo limite in un attimo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos x-1}-\cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos x-1}(-\sin x)-(-\sin x)}{2\sin x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-e^{\cos x-1}}{2\cos x} = 0.$$

Esercizio 9. Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to 3^-} 3^{\frac{1}{x-3}} + \log\frac{x}{3}.$$

Soluzione. Per la linearità dell'integrale

$$\lim_{x\to 3^-} 3^{\frac{1}{x-3}} + \log\frac{x}{3} = \lim_{x\to 3^-} 3^{\frac{1}{x-3}} + \lim_{x\to 3}\log\frac{x}{3},$$

dove nel secondo limite abbiamo fatto tendere la x a 3 e non a 3^- perché, dove l'argomento della funzione di cui vogliamo calcolare il limite non tende a zero, è indifferente far tendere x a $3, 3^-$ o 3^+. Ora il calcolo del secondo limite è immediato

$$\lim_{x\to 3}\log\frac{x}{3} = \log\lim_{x\to 3}\frac{x}{3} = \log 1 = 0.$$

Mentre per quanto riguarda il primo limite, osservando che

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{1}{x-3} = \lim_{x\to 3^-}\frac{1}{x-3} = \frac{1}{\lim_{x\to 3^-} x-3} = \frac{1}{0^-} = -\infty,$$

troviamo che il limite tende a $3^{-\infty} = 0$.

Esercizio 10. Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2-x}.$$

Soluzione. Per prima cosa osserviamo che, se $0 < x < 1$, allora $x^2 < x$, quindi il denominatore della seconda frazione è di segno negativo. Ma allora si ha una forma indeterminata di tipo $+\infty - \infty$. Se pero raccogliamo a denominatore comune troviamo

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2-x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x-1+1}{x(x-1)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x(x-1)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x-1} = -1.$$