TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE Prof. M. Spera

Addendum alla lezione XXVI

Sia $(L, [\,,\,])$ un'algebra di Lie (su K)

$N \leq L$ è detto ideale di $(L, [\,,\,])$ se $\forall X \in N$, $\forall Y \in L$

sottospazio vett.

vale $[X, Y] \in N$ $\quad (\star)$

(in particolare N è chiuso rispetto a $[\,,\,]$, ovvero è una sottoalgebra di Lie, ma $(\star)$ è più forte)

Allora $\mathcal{L} := L/N$ diviene un'algebra di Lie (quoziente), definendo

$$[\,[X], [Y]\,] := \big[\,[X,Y]\,\big]$$

classi

ovvero: il commutatore di due classi è la classe del commutatore

Tale definizione è ben posta: , infatti

$$[\,X + N, Y + N\,] = [X, Y] + \underset{\substack{\cup\!\!|\\ N}}{[N, Y]} + \underset{\substack{\cap\!\!|\\ N}}{[X, N]} + \underset{\substack{\cap\!\!|\\ N}}{[N, N]}$$

N è un ideale di L

Si verifica subito che $[\ ,\ ]$ (su h) è bilineare e antisimmetrica

Controlliamo l'identità di Jacobi

$$[[X],[[Y],[Z]]] + [[Y],[[Z],[X]]] + \\ + [[Z][[X],[Y]]]$$

$$= [X+N, [Y,Z]+N] + \dots$$

$$= \underset{}{[X[Y,Z]]} + \underset{\substack{\cap \\ N}}{[N, [Y,Z]]} + \underset{\substack{\cap \\ N}}{[X,N]} + \underset{\substack{\cap \\ N}}{[N,N]}$$

e analogamente per gli altri addendi, e l'asserto segue per l'id. di Jacobi in L.

Sia ora $\left(L = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2),\ [\,,\,] = \{\,,\,\} \right)$

Poisson

N = f. costanti è certamente un ideale di L

$$\{c, f\} = \ldots 0 \in N \qquad \forall f \in L.$$

Sia $\mathcal{L} = L/N$

Si ha allora

$$\mathcal{L} \underset{\text{antiisomorfismo}}{\cong} \mathcal{X}_{ham}(\mathbb{R}^2)$$

campi vettoriali hamiltoniani

$$\mathcal{L}_X \omega = 0 \iff i_X \omega = d\lambda_X$$

Esplicitamente l'antiisomorfismo è dato da:

$$[\lambda] = \lambda + c \longmapsto X_{\lambda + c} = X_\lambda$$