

sia  $\Gamma$  M.C.

allora  $\Gamma$  è chiuso per derivch.

$$\underline{\Gamma \vdash \alpha} \Rightarrow \alpha \in \Gamma$$

$$\alpha \notin \Gamma \quad \Gamma \subseteq \Gamma \cup \{\alpha\}$$

$$\Gamma, \alpha \vdash \perp \quad \Rightarrow \quad \underline{\Gamma \vdash \neg \alpha}$$

ASSURDO

$$\langle \mathbb{N}, \subseteq \rangle$$

$$x \subseteq y \Leftrightarrow y - x \text{ è un num. pari}$$

1) RIFL  $x \subseteq x$  ovv  $x - x = 0$  pari

2) TRANS  $x \subseteq y \text{ \& } y \subseteq z \Rightarrow x \subseteq z$

$$\begin{array}{l} x \subseteq y : y - x = k \in \text{PARI} \\ y \subseteq z : z - y = s \in \text{PARI} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} y - x = k \\ z - y = s \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \cancel{y} - x + \cancel{z} - \cancel{y} = k + s \\ z - x = k + s \in \text{PARI} \end{array}$$

3) ANTISIMM.  $x \subseteq y \text{ \& } y \subseteq x \Rightarrow x = y$

RILASCIAMO IL PRIMO ASSUNTO DI ESSERE IN  $\mathbb{Z}$

$$y - x \geq 0$$

$$x - y \geq 0$$

$$x - y = -(y - x) \quad z = y - x$$

$$z \text{ \& } -z \geq 0 \Leftrightarrow z = 0 \Rightarrow x = y$$

$$\left. \begin{array}{l} x \subseteq y \Rightarrow y \supseteq x \\ y \subseteq x \Rightarrow x \subseteq y \end{array} \right\} \Rightarrow x = y$$

$\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in \text{PAR}$$

$$3 \leq 4 \Leftrightarrow 4 - 3 \in \text{pari NO!}$$

$$x \leq y \Leftrightarrow \exists z \quad x + z = y$$

$$7 \leq 9 ?$$

$\langle A, \subseteq \rangle$   $m \in A$  è detto minimo  $\Leftrightarrow$

$$\forall q \in A \quad m \subseteq q$$

$M \in A$  è detto massimo  $\Leftrightarrow$

$$\forall q \in A \quad q \subseteq M$$

---

$\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$  esiste il minimo? esiste il massimo

$$\forall a \in \mathbb{N} \quad 0 \leq a$$

$$\forall a \in \mathbb{N} \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad 0 + k = a \quad \text{ovvero}$$

$$\forall a \in \mathbb{N} \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad k = a \quad \text{ok!}$$

$$M < M + 1$$

$$\langle \mathbb{N}, \leq \rangle \quad x \leq y \Leftrightarrow y - x \in \text{PARI}$$

esiste il minimo?

esiste il massimo?

$$m \text{ t.c. } \forall q \in \mathbb{N} \quad m \leq q$$

suggerimento se  $m$  è il minimo

$$\begin{array}{cc} \forall q \in \mathbb{N} & \begin{array}{c} m \leq q \\ \hline q - m \in \text{PARI} \\ \hline k \end{array} & \begin{array}{c} m \leq q+1 \\ \hline q+1 - m \in \text{PARI} \\ \hline k+1 \in \text{PARI} \end{array} \end{array}$$

$\langle \mathbb{N} \cup \{*\}, \sqsubseteq \rangle$

$$x \sqsubseteq y \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in \mathbb{N} & \& \quad x \leq y \\ \text{oppure} \\ y = * \end{cases}$$

$$x \sqsubseteq x$$

CASO 1  $x \in \mathbb{N}$

$$x \leq x$$

CASO 2  $x = *$

$$* \sqsubseteq *$$

} OK

$$x \sqsubseteq y \& y \sqsubseteq z \Rightarrow x \sqsubseteq z$$

CASO 1  $x, y, z \in \mathbb{N}$  IMMEDIATO

CASO 2  $x = * \& x \sqsubseteq y \Rightarrow y = *$

$$y = * \Rightarrow z = *$$

CASO 3  $x \neq * \& y = * \quad z = *$

CASO 4  $x \neq * \& y \neq * \quad z = *$

ANTISIMM ESERCIZIO PER CASA

he minimo ?

~~0~~

\*  $\hookrightarrow$  he massimo ?  
SI \*



PROPOSIZ.

$$A = \langle A, \subseteq \rangle$$

se  $A$  ha minimo questo è unico

USARE L'ANTISIMMETRIA

$m_1, m_2$  siano due minimi

allora ...  $m_1 \subseteq m_2$  &  $m_2 \subseteq m_1 \Rightarrow m_1 = m_2$

ANALOG. PER I MASSIMI



MINIMALE

MASSIMALE

$$\mathcal{A} = \langle A, \subseteq \rangle$$

$m \in A$  è detto minimale sse

$$\forall q \in A \quad q \subseteq m \Rightarrow q = m$$

$M \in A$  è detto MASSIMALE sse

$$\forall q \in A \quad M \subseteq q \Rightarrow q = M$$

ESIBIRE UN ORDINE  
PARZIALE  $\mathcal{A} = \langle A, \leq \rangle$

CHE ABBIAMO ALMENO UN  
m MINIMALE MA CHE  
NON ABBIAMO MINIMO

OGNI MINIMO  $\leq$  MINIMALE

OGNI MASSIMO  $\leq$  MASSIMALE

MA  
NON VALE IL VICEVERSA