Diario del corso di Analisi Matematica 2

prima parte - G. Orlandi

a.a. 2015-16

Vengono qui di seguito elencati gli argomenti trattati a lezione. Il diario servirà anche per definire il programma d'esame.

Lezione del 2 ottobre 2015 (2 ore, [A], sezioni 2.1, 3.1, 3.2, 3.3). Funzioni vettoriali di una variabile reale (curve in $\mathbb{R}^n$): limiti, continuità e derivazione si verificano e/o calcolano per componenti. Interpretazione geometrica della derivata come vettore tangente alla curva immagine. Interpretazione fisica come vettore velocità associato alla legge oraria di un punto materiale. Equazione parametrica della retta tangente alla curva immagine: una parametrizzazione canonica è data dallo sviluppo di Taylor di f arrestato al primo ordine. Velocità scalare. Integrale $\int_a^b \gamma(t)dt$ di una funzione vettoriale $\gamma(t)$ (equivale ad integrare $\gamma(t)$ per componenti),

Funzioni di più variabili reali. Come domini si considerano insiemi D che siano aperti, o contenuti (strettamente o meno) nella chiusura di insiemi aperti. Insiemi di livello $f^{-1}(c)$, sottolivello $f^{-1}((-\infty, c))$, sopralivello $f^{-1}((c, +\infty))$. Funzioni continue. Gli insiemi di livello di una funzione continua sono chiusi nel dominio della funzione, i sopralivelli e i sottolivelli sono aperti. Grafico Γ_f di una funzione di più variabili $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: $\Gamma_f = \{(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) :\ (x_1, ..., x_n) \in D,\ x_{n+1} = f(x_1, ..., x_n)\}$.

Lezione del 5 ottobre 2015 (2 ore, [A], sezioni 2.1, 3.1, 3.2, 3.3).

Derivabilità per funzioni di più variabili. Derivata direzionale di una funzione $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in $p_0 \in \Omega$: data una direzone $v \in \mathbb{R}^2$ (ossia $v = (a, b)$ con $a^2 + b^2 = 1$), la retta passante per $p_0 = (x_0, y_0)$ avente direzione v è data da $t \mapsto p(t) = (x_0+ta, y_0+tb)$, e la derivata nella direzione v di f in p_0 è definita da $D_v f(p_0) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(p(t)) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(x_0 + ta, y_0 + tb)$. Se $v = e_1 = (1, 0)$ (risp. $v = e_2 = (0, 1)$) si pone $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \equiv D_{e_1} f(p_0) = \frac{d}{dx}|_{x=x_0} f(x, y_0)$ (risp. $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \equiv D_{e_2} f(p_0) = \frac{d}{dy}|_{y=y_0} f(x_0, y)$), e tale derivata si chiama derivata parziale rispetto a x (risp. rispetto a y). Esempi di calcolo di derivate parziali.

Interpretazione geometrica delle derivate parziali / direzionali: sia $\Gamma_f = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3,\ (x, y) \in \Omega\}$ il grafico di f. La mappa $t \mapsto (x_0 + ta, y_0 + tb, f(x_0 + ta, y_0 + tb))$ ha come immagine la curva costituita dal grafico della restrizione di f alla retta $t \mapsto (x_0 + ta, y_0 + tb)$. Il vettore

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (x_0 + ta, y_0 + tb, f(x_0 + ta, y_0 + tb)) = (a, b, D_v f(x_0, y_0)\,),$$

applicato nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, è dunque un vettore tangente al grafico di f in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, la cui componente orizzontale è la direzione $v = (a, b)$, e la cui componente verticale è la derivata direzionale di f nella direzione v in p_0.

Sussistono esempi di funzioni che ammettono derivate parziali ma non sono continue. Esistono esempi di funzioni f che ammettono tutte le derivate direzionali in un certo punto p_0, ma non sono continue in p_0.

Lezione del 9 ottobre 2015 (2 ore, [A], sezione 3.3, 3.6 e 3.7)

Funzioni differenziabili. Differenziale $df(p_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di una funzione $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in un punto $p_0 \in \Omega$. Si tratta di un'applicazione lineare che verifica

$$\lim_{p \to p_0} \frac{|f(p) - f(p_0) - df(p_0) \cdot (p - p_0)|}{|p - p_0|} = 0 \,.$$

In altre parole, per una funzione differenziabile in p_0 vale lo sviluppo di Taylor al primo ordine

$$f(p) = f(p_0) + df(p_0) \cdot (p - p_0) + o(|p - p_0|) \,.$$

Esempio: se f è lineare, ovvero $f(p) = f(x_1, ..., x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n = \langle a, p\rangle$, con $a = (a_1, ..., a_n)$, allora ovviamente f è differenziabile, $df(p_0) \cdot v = a^t \cdot v = \langle a, v\rangle$ per ogni vettore $v \in \mathbb{R}^n$, e $df(p_0)$ è indipendente da p_0.

Se f è differenziabile in p_0 allora esistono le derivate parziali di f in p_0 e si ha $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0) = df(p_0) \cdot e_i$, e più in generale esistono tutte le derivate direzionali in p_0 e si ha $D_v f(p_0) = df(p_0) \cdot v$ per ogni direzione $v \in \mathbb{R}^n$.

Se f è differenziabile in p_0, l'equazione cartesiana del piano tangente al grafico di f in $(p_0, f(p_0)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ è data da $x_{n+1} = f(p_0) + df(p_0) \cdot (p - p_0)$, ovvero

$$x_{n+1} = f(p_0) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{0,i}) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0), \quad \text{dove } p = (x_1, ..., x_n) \quad \text{e } p_0 = (x_{0,1}, ..., x_{0,n}).$$

Detta $e_1, ..., e_n, e_{n+1}$ la base canonica di $\mathbb{R}^{n+1}$, il piano tangente al grafico è generato dai vettori $\{e_i + e_{n+1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0)\}_{i=1,...,n}$ (a lezione abbiamo visto il caso $n = 2$). Un vettore normale al piano tangente in $(p_0, f(p_0))$ è dato dal vettore $N_{p_0} = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p_0), -1) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Il differenziale $df(p_0)$ si rappresenta mediante il gradiente di f in p_0

$$\nabla f(p_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p_0) \right) \in \mathbb{R}^n,$$

ovvero si ha $df(p_0) \cdot v = \nabla f(p_0)^t \cdot v = \langle \nabla f(p_0), v\rangle$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$. Fissata la base canonica $e_1, ..., e_n$ di $\mathbb{R}^n$ (vettori colonna), l'insieme $\{e^1 := e_1^t, ..., e^n := e_n^t\}$ (vettori riga) forma una base canonica dello spazio $(\mathbb{R}^n)^*$ delle forme lineari $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. In particolare, per $p = (x_1, ..., x_n)$ si ha $e^i(p) = x_i$, per cui, con abuso di linguaggio, si identifica e^i con $de^i \equiv dx_i$, il differenziale della proiezione $p = (x_1, ..., x_n) \mapsto e^i(p) = x_i$.

In particolare si ha, rispetto a questa base,

$$df(p_0) = [\nabla f(p_0)]^t = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0)e^1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p_0)e^n \equiv \frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0)dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p_0)dx_n\,.$$

Il gradiente individua la direzione di massima crescita di f in p_0, ossia

$$\max_{|v|=1} D_v f(p_0) = \max_{|v|=1}\langle \nabla f(p_0), v\rangle = |\nabla f(p_0)|\,, \quad \text{raggiunto per } v = \frac{\nabla f(p_0)}{|\nabla f(p_0)|}.$$

Per dimostrarlo usiamo una caratterizzazione della norma di un vettore in uno spazio euclideo come $|w| = \max_{|v|\le 1}\langle v, w\rangle$. Infatti per Cauchy-Schwarz si ha sempre la disuguaglianza $|\langle v, w\rangle| \le |v| \cdot |w| \le |w|$, ossia $\max_{|v|\le 1}\langle v, w\rangle \le |w|$, ed inoltre $\langle v, w\rangle = |w|$ per $v = |w|^{-1}w$ (la cui norma $|v| = 1$).

Lo schema di flusso / ascesa gradiente per la determinazione di massimi locali di una funzione: dato $p_0 = (x_{0,1}, ..., x_{0,n}) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, si tratta di risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = \nabla f(p) \\ p(0) = p_0\,, \end{cases}$$

ovvero il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, ..., x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, ..., x_n) \\ x_i(0) = x_{0,i} & i = 1, ..., n. \end{cases}$$

Detto $\bar{p} = \lim_{t\to+\infty} p(t)$, se $\bar{p} \in \Omega$ allora $\nabla f(\bar{p}) = 0$, ossia $\bar{p}$ è un punto critico di f, che, per una scelta generica del dato iniziale p_0 risulta essere di massimo locale. L'analogo schema $\frac{dp}{dt} = -\nabla f(p)$ per trovare i minimi locali anche detto schema di flusso / discesa gradiente.

Lezione del 12 ottobre 2015 (3 ore, [A], sezione 3.5, 3.6, 4.1, 6.5 p.362, 6.7 p.374)). Continuità di una funzione differenziabile. Condizioni sufficienti per la differenziabilità, teorema del differenziale totale: se in un intorno $B(p_0, r)$ esistono le derivate parziali di f e sono continue in p_0, allora f è differenziabile in p_0. Dimostrazione del teorema del differenziale totale. Funzioni di classe C^1.

Differenziale di funzioni vettoriali. Se $f = (f_1, ..., f_m) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $p_0 \in \Omega$ e $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, si ha la rappresentazione mediante la matrice Jacobiana $Df(p_0) \equiv \frac{\partial\{f_1,...,f_m\}}{\partial\{x_1,...,x_n\}}(p_0)$:

$$df(p_0) \cdot v = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Regola della catena per il differenziale composto: se $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ sono funzioni differenziabili rispettivamente in $p_0 \in \Omega$ e $q_0 = f(p_0) \in U$, allora $h = g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}^k$ è differenziabile in p_0 e vale $dh(p_0) = d(g \circ f)(p_0) = dg(f(p_0)) \cdot df(p_0)$. In termini delle matrici Jacobiane,

$$\left[\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(p_0)\right] = \left[\frac{\partial g_i}{\partial y_\ell}(f(p_0))\right] \cdot \left[\frac{\partial f_\ell}{\partial x_j}(p_0)\right], \quad \text{ossia} \quad \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(p_0) = \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_\ell}(f(p_0)) \frac{\partial f_\ell}{\partial x_j}(p_0)\,.$$

Applicazione: ortogonalità del gradiente rispetto agli insiemi di livello. Data una funzione $f \in C^1(D;\mathbb{R})$, e dato l'insieme di livello $f^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}$, se $p_0 \in f^{-1}(c)$ e $\nabla f(p_0) \neq 0$, quest'ultimo vettore risulta ortogonale a $f^{-1}(c)$ in p_0. Dimostrazione (caso $n = 2$): supponendo che intorno a p_0 l'insieme di livello si possa descrivere mediante una curva parametrica $p(t) = (x(t), y(t))$ di classe C^1, detta $g(t) = f((x(t), y(t))$ la funzione composta, si ha, applicando la regola della catena:

$$0 = \frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} =< \nabla f, \frac{dp}{dt} >,$$

ovvero la condizione di ortogonalità.

Nota: l'ipotesi che l'insieme di livello sia parametrizzabile intorno a p_0 è sempre soddisfatta nel caso $\nabla f(p_0) \neq 0$, in virtù del Teorema delle funzioni implicite.

Esempi di funzioni vettoriali: campi vettoriali $F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, trasformazioni di coordinate $T : R \subset \mathbb{R}^n \to D \subset \mathbb{R}^n$ (si intendono invertibili e di classe C^1), superfici parametriche $\vec{r} : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

Esempi di campi vettoriali: gradienti di funzioni scalari. Espressione del campo generato da una forza di richiamo elastica (dovuta ad esempio ad una molla) posta nell'origine del piano. Detto $U(p) = U(x, y) = \frac{k}{2}(x^2 + y^2)$ il potenziale elastico, si ha $F(p) = -\nabla U(p) = -kp = -kr\hat{\imath}_r$ dove $r = |p|$, $\hat{\imath}_r = p/|p|$. Espressione del campo gravitazionale generato da una massa puntiforme posta nell'origine: detto $U(p) = K/|p|$ il potenziale gravitazionale, con $K > 0$ una costante opportuna, si ha $\vec{F}(p) = \nabla U(p) = -Kp/|p|^3 = -Kr^{-2}\hat{\imath}_r$.

Esempi di trasformazioni di coordinate: coordinate polari, coordinate sferiche. Le colonne della matrice Jacobiana delle trasformazioni di coordinate danno informazioni sui fattori locali di dilatazione di lunghezze, aree e volumi: se ad esempio $T : (r, \theta, \phi) \mapsto (x(r, \theta, \phi), y(r, \theta, \phi), z(r, \theta, \phi))$ indica la trasformazione in coordinate sferiche (con $r = |p| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, θ l'angolo polare e ϕ l'angolo azimutale), le colonne di DT, date da $\frac{\partial T}{\partial r}$, $\frac{\partial T}{\partial \theta}$, $\frac{\partial T}{\partial \phi}$, costituiscono vettori tangenti rispettivamente alle curve coordinate $\{\theta = cost.,\ \phi = cost.\}$, $\{r = cost.,\ \phi = cost.\}$, $\{\theta = cost.,\ r = cost.\}$, il determinante jacobiano $\det DT(r, \theta, \phi)$ rappresenta il fattore di dilatazione del volume di un cubo (infinitesimo) intorno al punto (r, θ, ϕ) per effetto della trasformazione T, ed i determinanti dei minori 2x2 di DT rappresentano i fattori di dilatazione locale delle aree di quadrati (infinitesimi) paralleli ai piani coordinati $r = cost.$, $\theta = cost.$, $\phi = cost.$.

Superfici parametriche, vettori tangenti e vettore normale. Data la parametrizzazione, di classe C^1, $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3$, con $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$, i vettori colonna della matrice Jacobiana $D\vec{r}$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}$$

sono vettori tangenti alla superficie $S = \{\vec{r}(u,v)\,,(u,v) \in D\} \subset \mathbb{R}^3$ nel punto $p = \vec{r}(u,v) \in S$, e ne generano il piano tangente qualora siano linearmente indipendenti, ovvero quando il rango di $D\vec{r}$ sia massimo. Vettore normale ad una superficie, nozione di orientazione. Un vettore $N = N(p)$ normale alla superficie in $p \in S$ si ottiene, in modo canonico, mediante il prodotto vettoriale $N = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$. La norma di N corrisponde all'area del parallelogramma individuato da $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ e $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ (si veda sotto una giustificazione più generale di questo fatto), e costituisce il fattore di dilatazione locale dell'area di un quadrato (infinitesimo) parallelo agli assi coordinati di $\mathbb{R}^2$.

Lezione del 16 ottobre 2015 (2 ore, [A], sezione 4.1).

Derivate parziali di ordine superiore. Matrice Hessiana delle derivate parziali seconde.Teorema di Schwarz: se $f \in C^2(\Omega;\mathbb{R})$ (ovvero esistono le derivate parziali seconde e sono continue in D) allora la matrice Hessiana $D^2f(p) = [\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p)]$ è simmetrica per ogni $p \in D$. Derivate successive.

Sviluppo di Taylor al secondo ordine per $f \in C^2(D;\mathbb{R})$ in $p_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$: sia $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, $p \equiv p(t) = p_0 + tv \in D$ per $0 \le t \le t_0$. Posto $g(t) = f(p(t))$, si ha

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p(t))v_i = \langle \nabla f(p), v \rangle\,, \quad g''(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p(t))v_j v_i = \langle D^2 f(p)\cdot v,\, v\rangle\,.$$

Dallo sviluppo di Taylor $g(t) = g(0) + tg'(0) + \frac{t^2}{2}g''(0) + o(t^2)$ si ottiene

$$f(p) = f(p_0) + \langle \nabla f(p_0), p - p_0\rangle + \frac{1}{2}\langle D^2 f(p_0)\cdot(p-p_0),\,(p-p_0)\rangle + o(|p-p_0|^2)\,.$$

Lezione del 19 ottobre 2015(3 ore, [A], sezione 4.1, 4.2)

Studio della natura dei punti critici di $f \in C^2(D,\mathbb{R})$: se p_0 è un punto critico di f (ossia $\nabla f(p_0) = 0$), allora lo sviluppo di Taylor al secondo ordine si riduce a

$$f(p) = f(p_0) + \frac{1}{2}\langle D^2 f(p_0)\cdot(p-p_0),\,(p-p_0)\rangle + o(|p-p_0|^2)\,.$$

Sia $R \in O(n)$ tale che $R^t \cdot D^2 f(p_0) \cdot R =$diag $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, con $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ autovalori di $D^2 f(p_0)$, e sia $p - p_0 = R \cdot w$, con $w = (w_1, ..., w_n) \in \mathbb{R}^n$. Si ha

$$\begin{aligned}\langle D^2 f(p_0)\cdot(p-p_0),\,(p-p_0)\rangle &= \langle D^2 f(p_0)\cdot R\cdot w,\, R\cdot w\rangle = \langle R^t\cdot D^2 f(p_0)\cdot R\cdot w,\, w\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i^2\,.\end{aligned}$$

Otteniamo dunque, tenendo conto che $|w|^2 = |Rw|^2 = |p - p_0|^2$,

$$f(p) = f(p_0) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i^2 \, + o(|w|^2)\,,$$

da cui si deduce che se gli autovalori di $D^2 f(p_0)$ sono tutti positivi (risp. negativi) allora p_0 è un punto di minimo (risp. massimo) locale per f. Gli insiemi di livello attorno a p_0 sono ellissoidali ed il gradiente è uscente (risp. entrante) da p_0. Se vi sono autovalori di segno discorde, p_0 è detto un punto di sella. Se qualche autovalore di $D^2 f(p_0)$ risulta nullo (e gli altri non sono di segno discorde), allora il solo sviluppo di Taylor al secondo ordine non permette di decidere a priori sulla natura del punto critico.

Esempi di studio della natura dei punti critici di una funzione di più variabili mdiante il test della matrice hessiana.

Alcune regole per la determinazione dei segni degli autovalori della matrice Hessiana: nel caso $n = 2$ si studia il segno di traccia e determinante. Più in generale ci si può avvalere della regola dei segni di Cartesio per le radici del polinomio caratteristico: se tutti i segni dei coefficienti sono concordi allora non vi sono radici positive, mentre se tutti i coefficienti sono a segno alterno non vi possono essere radici negative.

Una regola pratica equivalente alla regola dei segni di Cartesio consiste nel calcolare, per $k = 1, ..., n$, i segni dei determinanti dei minori $A_k = [a_{ij}]$, con $1 \leq i, j \leq k$ e $a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p_0)$. Se questi hanno tutti lo stesso segno allora gli autovalori sono tutti negativi, se hanno segno alterno gli autovalori sono tutti positivi.

Estremo superiore ed inferiore di funzioni regolari su domini $D \subset \mathbb{R}^n$ aperti eventualemte illimitati: per determinarli bisogna confrontare il valore della funzione nei punti critici interni al dominio con l'andamento limite di f alla frontiera ∂D di D o all'infinito.

Teorema di Weierstrass: una funzione continua su un dominio chiuso e limitato (ovvero sequenzialmente compatto) di $\mathbb{R}^n$ ammette massimo e minimo.

Massimi e minimi (assoluti) di funzioni regolari su domini $D \subset \mathbb{R}^n$ chiusi e limitati: vanno ricercati tra i punti critici interni a D e tra i massimi e minimi vincolati alla frontiera (o bordo) ∂D. I vincoli che definiscono ∂D (rispettivamente D) sono espressi in generale da una o più relazioni di uguaglianza (rispettivamente disuguaglianza) tra le variabili indipendenti, ovvero D è l'intersezione di sottolivelli di una o più funzioni regolari.

Massimi e minimi vincolati: espressione del vincolo in forma parametrica. Risoluzione di problemi di massimo e minimo vincolato quando il vincolo è espresso in forma parametrica. Espressione del vincolo in forma implicita (ovvero come insieme di livello di una funzione data), introduzione al metodo dei moltiplicatori di Lagrange: nei punti di massimo o minimo vincolato il gradiente della funzione da ottimizzare risulta non avere componenti tangenti al vincolo, e pertanto risulta essere parallelo (ovvero proporzionale) al gradiente della funzione attraverso cui si esprime il vincolo.

Teorema dei moltiplicatori di Lagrange (a lezione è stato discusso il caso $n = 2$): sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $f, g \in C^1(A; \mathbb{R})$ e $p_0 \in A$ un estremo di f vincolato a $\Gamma = g^{-1}(c)$, per un dato livello $c \in \mathbb{R}$. Se $\nabla g(p_0) \neq 0$ allora esiste $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ (detto *moltiplicatore di Lagrange*) tale che $\nabla f(p_0) = \lambda_0 \cdot \nabla g(p_0)$. Equivalentemente, la coppia $(p_0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ è punto critico (NB: non più vincolato!!) della funzione (detta *Lagrangiana*) $\psi : A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $\psi(p, \lambda) = f(p) - \lambda \cdot g(p)$.

Idea della dimostrazione nel caso $n = 2$: la condizione $\nabla g(p_0) \neq 0$ garantisce, in virtù del teorema del Dini delle funzioni implicite, che esista un intorno $Q \subset A$ di p_0 tale che $g^{-1}(c) \cap Q$ si possa esprimere in forma parametrica, ovvero $g^{-1}(c) \cap Q = \{p(t),\ t \in [a, b]\}$, con $t \mapsto p(t)$ di classe C^1. La condizione di estremo vincolato in $p_0 = p(t_0)$ si traduce nella condizione di stazionarietà in t_0 per la restrizione di f a $g^{-1}(c) \cap Q$, ovvero per la funzione composta $h(t) = f(p(t))$, da cui si ricava

$$0 = h'(t_0) = \langle \nabla f(p_0), \dot{p}(t_0) \rangle ,$$

con $\dot{p}(t_0)$ vettore tangente a $g^{-1}(c) \cap Q$ in p_0. altrimenti detto, $\nabla f(p_0)$ è ortogonale a $g^{-1}(c) \cap Q$ in p_0. D'altra parte, essendo $\nabla g(p)$ ortogonale a $g^{-1}(c) \cap Q$ in ogni punto, si ha che $\nabla f(p_0)$ è parallelo a $\nabla g(p_0)$, ovvero esiste $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(p_0) = \lambda_0 \cdot \nabla g(p_0)$. □

Lezione del 23 ottobre 2015 (2 ore, [A], sezione 4.1, 4.2, 4.4, 3.8)

Un esempio di programmazione lineare in tre variabili (cfr. *metodo del simplesso*): sia da massimizzare (minimizzare) la funzione (detta *funzione obbiettivo*) $f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 a_i x_i + b$ sotto le condizioni $r_k(x_1, x_2, x_3) \leq 0$, con $r_k(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 c_{ik} x_i + d_k$, per $k = 1, ..., N$. Il vincolo imposto ad f rappresenta l'intersezione di N semispazi, e quindi si tratta di un insieme *convesso* (ovvero per ogni coppia di punti dell'insieme, il segmento che li unisce è interamente contenuto nell'insieme) a frontiera *poliedrale*. Non essendoci punti critici interni poichè $\nabla f = (a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$, il massimo ed il minimo sono assunti alla frontiera poliedrale, ed in generale nei vertici del poliedro: infatti, per una scelta generica dei dati si ha che i vettori (c_{1k}, c_{2k}, c_{3k}), che rappresentano le normali alle facce del poliedro, non saranno paralleli ad $(a_1, a_2, a_3) = \nabla f$, e quindi la funzione ristretta ad ogni faccia assumerà necessariamente massimo e minimo sugli spigoli. D'altra parte, ∇f non sarà (in generale) ortogonale agli spigoli, per cui il massimo e minimo della funzione ristretta a ciascun spigolo verrà assunto nei vertici.

Caratterizzazione dei massimi e minimi vincolati di una forma quadratica sulla sfera unitaria di $\mathbb{R}^n$. Per $p = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, B matrice simmetrica $n \times n$, ossia $B = B^t$, sia data la forma quadratica

$$Q(p) = p^t \cdot B \cdot p = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i x_j.$$

Si osservi innanzitutto che $Q(\lambda p) = \lambda^2 Q(p)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ (ovvero Q è una funzione omogenea di grado 2). Calcoliamone il gradiente: si ha

$$\frac{\partial Q}{\partial x_k}(p) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} \frac{\partial}{\partial x_k}(x_i x_j) = \sum_{\ell=1}^n (a_{k\ell} + a_{\ell k}) x_\ell,$$

da cui si deduce $\nabla Q(p) = (B + B^t) \cdot p = 2B \cdot p$, essendo $B + B^t = 2B$. In particolare $\nabla Q(p) = 0$ se e solo se $p \in \ker B$.

Consideriamo dunque il problema di massimo (risp. minimo) vincolato

$$\max_{|p|=1} Q(p)\,, \qquad \min_{|p|=1} Q(p)\,.$$

Il vincolo può essere espresso dall'equazione $g(p) = 0$, con $g(p) = |p|^2 - 1 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1$. Impostando il problema con i moltiplicatori di Lagrange, siamo condotti a risolvere il sistema

$$\nabla Q(p) = \lambda \cdot \nabla g(p)\,, \qquad g(p) = 0\,,$$

ovvero, dato che $\frac{\partial g}{\partial x_k}(p) = 2x_k$,

$$2B \cdot p = 2\lambda p\,, \qquad |p|^2 = 1\,.$$

Pertanto i punti di estremo vincolato (tra cui il massimo ed il minimo) sono gli autovettori unitari di B. Osservando che, se p è un autovettore unitario, vale

$$Q(p) = p^t \cdot B \cdot p = p^t \cdot (\lambda \cdot p) = \lambda < p, p >= \lambda,$$

si ha che i valori estremi corrispondono agli autovalori di B. In particolare il massimo ed il minimo autovalore realizzano rispettivamente il massimo ed il minimo di Q sull'insieme $\{|p| = 1\}$.

Utilizzando questa caratterizzazione di autovettori unitari e autovalori di una matrice simmetrica si può dimostrare ad esempio il teorema spettrale per matrici simmetriche, ovvero la loro diagonalizzabilità, costruendo induttivamente una base ortonormale di autovettori.

Lezione del 26 ottobre 2015 (3 ore, [A], sezione 4.4, 3.8)

Teorema dei moltiplicatori di Lagrange: sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $f, g \in C^1(A; \mathbb{R})$ e $P_0 \in A$ un estremo di f vincolato a $\Gamma = g^{-1}(0)$. Se $\nabla g(P_0) \neq 0$ allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ (detto *moltiplicatore di Lagrange*) tale che $\nabla f(P_0) = \lambda \cdot \nabla g(P_0)$. Equivalentemente, la coppia $(P_0, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ è punto critico (NB: non più vincolato!!) della funzione (detta *Lagrangiana*) $\psi : A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $\psi(Q, \mu) = f(Q) - \mu \cdot g(Q)$.

La dimostrazione (NB: vista a lezione solo nel caso $n = 2$) si basa sul Teorema del Dini delle Funzioni Implicite: dato che $\nabla g(P_0) \neq 0$, non è limitativo supporre (a meno di una permutazione di coordinate) $\frac{\partial g}{\partial x_n}(P_0) \neq 0$. Per il Teorema delle funzioni implicite esiste un intorno B di P_0 tale che il vincolo ristretto a B si può esprimere come grafico di una funzione $h : R \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ di classe $C^1(R)$, ossia $\Gamma \cap B = \{(x_1, ..., x_n),\ (x_1, ..., x_{n-1}) \in R\,,\ x_n = h(x_1, ..., x_{n-1})\}$. Si osservi che il piano tangente a $\Gamma \cap B$ in un punto $Q = (x_1, ...x_{n-1}, h(x_1, ..., x_{n-1})$ è generato dai vettori $\frac{\partial Q}{\partial x_i} = e_i + \frac{\partial h}{\partial x_i} e_n$, per $i = 1, ..., n-1$, che sono ortogonali al vettore normale $\nabla g(Q)$.

Inoltre, in $P_0 = (\bar{x}_1, ..., \bar{x}_{n-1}, h(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_{n-1}))$ la funzione composta $m(x_1, ..., x_{n-1}) = f(x_1, ..., x_{n-1}, h(x_1, ..., x_{n-1})$ ammette un punto critico, pertanto in P_0 si ha $\frac{\partial m}{\partial x_i} =$

$\langle \nabla f, e_i + \frac{\partial h}{\partial x_i} e_n \rangle = 0$ per ogni $i = 1, ..., n-1$, ossia $\nabla f(P_0)$ è ortogonale al piano tangente a Γ in P_0, e dunque risulta necessriamente parallelo a $\nabla g(P_0)$.

$\square$

Teorema dei moltiplicatori di Lagrange nel caso di k vincoli: sia $G = (G_1, ..., G_k) : A \subset \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$ di classe C^1, a sia $f \in C^1(A; \mathbb{R})$. Se $p_0 \in G^{-1}(0)$ è un estremo vincolato per f ristretta a $G^{-1}(0)$ e se $DG(p_0)$ ha rango massimo k, allora $\exists\ \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ tali che $\nabla f(p_0) = \lambda_1 \nabla G_1(p_0) + ... + \lambda_k \nabla G_k(p_0)$. La dimostrazione è conseguenza del Teorema delle Funzioni Implicite e della regola di derivazione delle funzioni composte.

Programmazione non lineare: dato $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+k}$, se si deve ottimizzare $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$ ristretta ai vincoli $G_1(p) \leq 0$,..., $G_k(p) \leq 0$, dove $p = (x_1, ..., x_{n+k}) \in \Omega$ e $G_1, ..., G_k \in C^1$, l'estremo vincolato $p_0 = (x_1^0, ..., x_{n+k}^0) \in \Omega$ risulta essere, sotto certe ipotesi sui vincoli, un punto critico (libero) della funzione (lagrangiana) ausiliaria

$$\Psi(x_1, ..., x_{n+k}, \lambda_1, ..., \lambda_k, u_1, ..., u_k) = f(p) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (G_i(x_1, ..., x_{n+k}) + u_i^2)\,.$$

Il sistema corrispondente $\nabla \Psi = 0$ è detto sistema delle condizioni di Kuhn-Tucker:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial G_i(p_0)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_{n+k}}(p_0) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial G_i(p_0)}{\partial x_{n+k}} \\ G_1(p_0) = -u_1^2 \\ \vdots \\ G_k(p_0) = -u_k^2 \\ \lambda_1 u_1 = 0 \\ \vdots \\ \lambda_k u_k = 0\,. \end{cases}$$

Le ipotesi cui devono soddisfare i vincoli discendono dal Teorema delle funzioni implicite.

Il teorema del Dini delle funzioni implicite. Enunciato nel caso di due variabili: se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $g : \Omega \to \mathbb{R}$ è di classe $C^1(\Omega)$, $p_0 \equiv (x_0, y_0) \in g^{-1}(0)$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(p_0) \neq 0$, allora esistono $\delta, \sigma > 0$, ed un intorno $R = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \sigma, y_0 + \sigma]$ tale che $g^{-1}(0) \cap R = \{(x, y) \in R\,,\ y = \phi(x)\}$, dove $\phi : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^1. Si ha inoltre la formula

$$\phi'(x) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(x, \phi(x))}{\frac{\partial G}{\partial y}(x, \phi(x))}\,.$$

Il teorema del Dini dà delle condizioni sufficienti affinchè l'insieme di livello $g^{-1}(0)$ possa rappresentarsi, localmente, come grafico di una opportuna funzione $y = \phi(x)$, la quale risulta definita implicitamente dall'equazione $g(x,y)=0$, e le cui derivate possono essere calcolate derivando implicitamente rispetto a x la relazione $g(x,\phi(x))=0$. In particolare ϕ può essere calcolata approssimandola mediante sviluppi di Taylor.

Dimostrazione del teorema delle funzioni implicite nel caso di due variabili. Supponendo $\frac{\partial G}{\partial y}(x_0,y_0)>0$, esiste $\sigma>0$ tale che $\frac{\partial G}{\partial y}(x,y)>0$ per $x_0-\sigma\le x\le x_0+\sigma$ e $y_0-\sigma\le y\le y_0+\sigma$. Possiamo anche supporre senza perdita di generalità che

$$\min\left\{\frac{\partial G}{\partial y}(x,y),\ x_0-\sigma\le x\le x_0+\sigma\,,\ y_0-\sigma\le y\le y_0+\sigma\right\}=\ell>0\,.$$

In particolare, la funzione $t\mapsto G(x_0,t)$ è strettamente crescente per $y_0-\sigma\le t\le y_0+\sigma$, e dunque vale $G(x_0,y_0-\sigma)<0$ e $G(x_0,y_0+\sigma)>0$. Per la continuità di G esiste $0<\delta<\sigma$ tale che $G(x,y_0-\sigma)<0$ e $G(x,y_0+\sigma)>0$ per ogni $x_0-\delta\le x\le x_0+\delta$. Per ogni $x_0-\delta\le x\le x_0+\delta$, la stretta monotonia della funzione $t\mapsto G(x,t)$ implica che esiste un unico punto $y\equiv\phi(x)\in[y_0-\sigma,y_0+\sigma]$ tale che $G(x,y)=G(x,\phi(x))=0$. Verifichiamo che la funzione implicita ϕ sia di classe C^1: siano x e $x+h$ in $[x_0-\delta,x_0+\delta]$, consideriamo la restrizione di G al segmento di estremi $p=(x,\phi(x))$ e $q=(x+h,\phi(x+h))$, ovvero la funzione

$$f(t)=G(p+t(q-p))=G(x+th,\phi(x)+t[\phi(x+h)-\phi(x)])\,,\qquad 0\le t\le 1\,.$$

Per il teorema di Lagrange del valor medio, si ha, per un certo $0<\tau<1$,

$$f(1)-f(0)=f'(\tau)=\frac{\partial G}{\partial x}(p_\tau)\cdot h+\frac{\partial G}{\partial y}(p_\tau)\cdot[\phi(x+h)-\phi(x)]\,,$$

dove $p_\tau=p+\tau(q-p)$. Essendo $f(1)=f(0)=0$, si ottiene in particolare

$$\phi(x+h)-\phi(x)=-\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(p_\tau)}{\frac{\partial G}{\partial y}(p_\tau)}h\,.$$

Dalla relazione precedente si ricava, dato che $p_\tau\in[x_0-\delta,x_0+\delta]\times[y_0-\sigma,y_0+\sigma]$,

$$|\phi(x+h)-\phi(x)|\le h\frac{M}{\ell}\,,$$

dove

$$M=\max\left\{\frac{\partial G}{\partial x}(x,y),\ x_0-\delta\le x\le x_0+\delta,\ y_0-\sigma\le y\le y_0+\sigma\right\}\,.$$

Facendo tendere h a zero, si ottiene così la continuità di ϕ per ogni $x_0-\delta\le x\le x_0+\delta$.

Ora, stabilito che ϕ è continua, si può dedurre che per $h\to 0$ il punto $p_\tau=(x+\tau h,\phi(x)+\tau[\phi(x+h)-\phi(x)])$ tende effettivamente a $p=(x,\phi(x))$, da cui, passando al limite per $h\to 0$ nella relazione

$$\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h}=-\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(p_\tau)}{\frac{\partial G}{\partial y}(p_\tau)}\,,$$

si ottiene che ϕ è derivabile e vale la formula

$$\phi'(x) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(x, \phi(x))}{\frac{\partial G}{\partial y}(x, \phi(x))}.$$

D'altra parte, il secondo membro della precedente relazione è costituito dalla composizione di funzioni continue, pertanto è continuo. Si deduce pertanto che ϕ è in realtà di classe C^1. $\square$

Lezione del 2 novembre 2015 (3 ore, [A], sezione 3.8) Il teorema del Dini delle funzioni implicite (caso generale): sia $G : A \subset \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^k$ una funzione di classe C^1 nelle variabili $(x, y) \equiv (x_1, .., x_n, y_1, ..., y_k) \in \mathbb{R}^{n+k}$, e sia $(x_0, y_0) \in A$ tale che $G(x_0, y_0) = 0$ e $\det\frac{\partial\{G_1,...,G_k\}}{\partial\{y_1,...,y_k\}} \neq 0$. Allora $\exists\ \delta, \sigma > 0$, ed esiste $\phi : B_\delta(x_0) \subset \mathbb{R}^n \to B_\sigma(y_0) \subset \mathbb{R}^k$ tali che $G^{-1}(0) \cap (B_\delta(x_0) \times B_\sigma(y_0)) = \{(x, y) :\ x \in B_\delta(x_0)\,,\ y = \phi(x)\}$. Inoltre, ϕ è di classe C^1 e si ha

$$D\phi(x) = -\left[\frac{\partial\{G_1, ..., G_k\}}{\partial\{y_1, ..., y_k\}}\right]^{-1} \cdot \left[\frac{\partial\{G_1, ..., G_k\}}{\partial\{x_1, ..., x_n\}}\right]\Bigg|_{y=\phi(x)},$$

ovvero vale la formula di derivazione implicita

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(G_i(x, \phi(x))) = \frac{\partial G_i}{\partial x_j}(x, \phi(x)) + \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\partial G_i}{\partial y_\ell}(x, \phi(x))\frac{\partial \phi_\ell}{\partial x_j}(x)\,,$$

che permette il calcolo approssimato di ϕ mediante il suo sviluppo di Taylor centrato in (x_0, y_0).

Osserviamo che nel caso G sia lineare, il teorema delle funzioni implicite si riduce al teorema di Rouché-Capelli.

Alcune applicazioni del teorema delle funzioni implicite viste a lezione sono il teorema dei moltiplicatori di Lagrange e la descrizione parametrica delle soluzioni di sistemi di equazioni non lineari.

Esercizi sul caldolo di derivate (e sviluppi di Taylor al primo ordine) di funzioni definite implicitamente.

Lezione del 2 novembre 2015 (3 ore, [A], sezione 3.8, [D], sezione 11.1, 11.1.6, 12.1, 11.2).) Teorema della funzione inversa: se $g : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ è di classe C^1 e se $\det Dg(p_0) \neq 0$ (ovvero $\exists\ [Dg(p_0)]^{-1}$), allora $\exists\ U \subset A$ intorno di p_0 e $V \subset \mathbb{R}^k$ intorno di $q_0 = g(p_0)$ tale che $g|_U : U \to V$ è invertibile. Inoltre, l'inversa $g|_U{}^{-1}$ è di classe C^1 (si dice che g è un diffeomorfismo locale), e $[D(g|_U)^{-1}(q_0)] = [Dg(p_0)]^{-1}$.

Tale risultato dà condizioni sufficienti per la risolubilità di sistemi non lineari di k equazioni in k incognite.

Esempio: la trasformazione in coordinate polari $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ verifica $\det\frac{\partial\{x,y\}}{\partial\{r,\theta\}} = r \neq 0\ \forall\, r > 0$, $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$. Tale trasformazione è dunque un diffeomorfismo locale. Si osservi che la trasformazione non è globalmente invertibile, in quanto (r, θ) ed $(r, \theta + 2k\pi)$ hanno la stessa immagine $\forall\, k \in \mathbb{Z}$.

Esempio di calcolo di matrice Jacobiana di una funzione inversa in due variabili: date le relazioni $x = f(u, v) = x(u, v)$ e $y = g(u, v) = y(u, v)$, con $\frac{\partial x,y}{\partial u,v}(u_0, v_0) \neq 0$, si ha, per l'invertibilità locale, $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$ con $[\frac{\partial u,v}{\partial x,y}] = [\frac{\partial x,y}{\partial u,v}]^{-1}$ per (x, y) vicino a (x_0, y_0) con $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$.

Il calcolo può anche essere effettuato derivando implicitamente rispetto a x e ad y le relazioni $G_1(x, y, u, v) = x - f(u, v) = 0$ e $G_2(x, y, u, v) = y - g(u, v) = 0$, ovvero vi è una sostanziale equivalenza dal punto di vista teorico tra teorema delle funzioni implicite e teorema delle funzioni inverse.

Formula degli accrescimenti finiti: si tratta di una versione del teorema del valor medio per funzioni vettoriali. Data $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ di classe C^1 e $p_1, p_2 \in D$ tali che il segmento $[p_1, p_2] = \{p_1 + t(p_2 - p_1),\ 0 \leq t \leq 1\} \subset D$, si ha

$$|f(p_2) - f(p_1)| \leq \left(\sup_{[p_1,p_2]} ||Df|| \right) \cdot |p_2 - p_1| \,,$$

dove $|| \cdot ||$ è ad esempio la norma operatoriale di Df (o una qualsiasi norma compatibile con il prodotto righe per colonne). Infatti, per il teorema fondamentale del calcolo applicato a $t \mapsto f(p_1 + t(p_2 - p_1))$ si ha

$$\begin{aligned}
|f(p_2) - f(p_1)| &= \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} f(p_1 + t(p_2 - p_1)) dt \right| = \left| \int_0^1 [Df(p_1 + t(p_2 - p_1)] \cdot (p_2 - p_1) dt \right| \\
&\leq \int_0^1 |\, Df(p_1 + t(p_2 - p_1)) \cdot (p_2 - p_1)\, | dt \\
&\leq \int_0^1 ||Df(p_1 + t(p_2 - p_1))|| \cdot |p_2 - p_1|\, dt \\
&\leq \int_0^1 \sup_{0 \leq t \leq 1} ||Df(p_1 + t(p_2 - p_1))|| \cdot |p_2 - p_1|\, dt \\
&= \sup_{[p_1,p_2]} ||Df(p_1 + t(p_2 - p_1))|| \cdot |p_2 - p_1|.
\end{aligned}$$

Dimostrazione del Teorema della funzione inversa: sia $q \in B_s(q_0)$, e si consideri lo schema di tipo Newton per sistemi non lineari (in realtà corrisponde al metodo delle secanti) dato da $p_{n+1} = f(p_n)$, con

$$f(p) = p + [Dg(p_0)]^{-1}(q - g(p))\,.$$

Si ha $p = f(p)$, ossia p è punto fisso di f, se e solo se $q = g(p)$. In altre parole, se il punto fisso p esiste ed è unico, allora $p = g^{-1}(q)$ è l'unica l'immagine inversa di q secondo g, ossia g è invertibile.

Dimostriamo che f è una contrazione se p è sufficientemente vicino a p_0, in modo da garantire esistenza e unicità del punto fisso di f, ovvero l'invertibilità locale di g

intorno a p_0 in virtù del principio delle contrazioni in uno spazio metrico completo (vedi sotto)

Siano $p_1, p_2 \in B_r(p_0)$. Per la formula degli accrescimenti finiti si ha

$$|f(p_2) - f(p_1)| \leq \sup_{B_r(p_0)} ||Df|| \cdot |p_2 - p_1| \quad \forall\, p_1, p_2 \in B_r(p_0).$$

Ora calcoliamo $Df(p)$ per ogni $p \in B_r(p_0)$, e dimostriamo che si ha $||Df(p)|| \leq \frac{1}{2}$ per ogni $p \in B_r(p_0)$ a patto di scegliere r sufficientemente piccolo (in particolare f è una contrazione). Si ha

$$Df(p) = I - [Dg(p_0)]^{-1}[Dg(p)] = [Dg(p_0)]^{-1} \cdot [Dg(p_0) - Dg(p)]\,,$$

da cui

$$||Df(p)|| = ||\,[Dg(p_0)]^{-1} \cdot [Dg(p_0) - Dg(p)]\,|| \leq ||Dg(p_0)^{-1}|| \cdot ||Dg(p_0) - Dg(p)||\,,$$

e dato che g è di classe C^1 si ha che per $p \to p_0$ vale $||Dg(p_0) - Dg(p)|| \to 0$ (continuità di Dg in p_0), da cui discende che $||Df(p)||$ può essere reso piccolo a piacere per p sufficientemente vicino a p_0.

Concludiamo la dimostrazione (*non visto a lezione*): mostriamo ora che per q sufficientemente vicino a q_0 (ovvero per s sufficientemente piccolo) si ha che f è una contrazione di $X = \overline{B(p_0, r)}$ in sè ($X \subset \mathbb{R}^n$ è completo in quanto sottoinsieme chiuso dello spazio metrico completo $\mathbb{R}^n$), ossia mostriamo che $|p - p_0| \leq r \Rightarrow |f(p) - p_0| \leq r$. In effetti si ha

$$|f(p) - p_0| \leq |f(p) - f(p_0)| + |f(p_0) - p_0| \leq \frac{1}{2}|p - p_0| + ||Dg(p_0)^{-1}|| \cdot |q - q_0| \leq r$$

a patto di scegliere s in modo che $||Dg(p_0)^{-1}|| \cdot |q - q_0| \leq ||Dg(p_0)^{-1}|| \cdot s \leq r/2$. Fissati dunque in tal modo s ed r, e ponendo $V = B_s(q_0)$ ed $U = g^{-1}(B_s(q_0)) \cap B(p_0, r)$, si ha che $g|_U$, la funzione g ristretta ad U, è invertibile, e si può dimostrare inoltre che la funzione inversa $(g|_U)^{-1}$ è differenziabile, e di classe C^1, in altre parole $g|_U$ è un diffeomorfismo di U su V. La formula per il differenziale della funzione inversa segue ad esempio derivando la relazione $(g|_U)^{-1} \circ (g|_U) = I$.

Il principio delle contrazioni in uno spazio metrico completo (Teorema di punto fisso di Banach-Caccioppoli): dato (X, d) spazio metrico completo, $T : X \to X$ una contrazione (ossia $\exists\, K < 1$ tale che $d(T(x), T(y)) \leq K \cdot d(x, y)\ \forall\, x, y \in X$), allora esiste un'unico punto fisso $\bar{x} \in X$ di T (ovvero un'unica soluzione $\bar{x} \in X$ dell'equazione $x = T(x)$).

Nota: abbiamo dimostrato il teorema nel caso $X \subset \mathbb{R}^n$ sottoinsieme chiuso, e con $d(p, q) = |p - q|$ la distanza euclidea su $\mathbb{R}^n$, per cui si ha che (X, d) è completo.

La dimostrazione è costruttiva, mediante uno schema iterativo, e fornisce anche una stima quantitativa dell'errore. Sia $x_0 \in X$, definiamo per ricorrenza la successione

$x_{n+1} = T(x_n)$, per $n \in \mathbb{N}$. Due i casi: o si ha $x_{n+1} = x_n$ per un certo $n \in \mathbb{N}$, e quindi $x_n = x_{n+1} = T(x_n)$ è punto fisso di T, oppure rimane definita una successione $\{x_n\} \subset X$, che risulta essere di Cauchy in X. Infatti, si ha

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq K \cdot d(x_n, x_{n-1}) \leq \cdots \leq K^n \cdot d(x_1, x_0)\,,$$

da cui si deduce che, per $m > n+1 > n_0$, per la disuguaglianza triangolare,

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq \sum_{j=n}^{m-1} d(x_{j+1}, x_j) \leq \sum_{j=n}^{m-1} K^j \cdot d(x_1, x_0) = K^n \cdot d(x_1, x_0) \sum_{j=0}^{m-n-1} K^j \\ &\leq K^n \cdot d(x_1, x_0) \sum_{j=0}^{\infty} K^j \leq K^{n_0} \frac{d(x_1, x_0)}{1-K} < \epsilon \end{aligned}$$

per n_0 sufficientemente grande, e per ogni $m > n+1 > n_0$, ovvero $\{x_n\}$ è di Cauchy in X. Sia $\lim_m x_m = \bar{x} \in X$ per la completezza di X.

Passando al limite per $m \to +\infty$ nella disuguaglianza precedente, si ottiene la stima quantitativa dell'errore $d(\bar{x}, x_n) \leq K^n \frac{d(x_1, x_0)}{1-K}$. Inoltre, passando al limite per $n \to +\infty$ nella relazione di ricorrenza $x_{n+1} = T(x_n)$, dato che $x_{n+1} \to \bar{x}$ e $T(x_n) \to T(\bar{x})$ per la continuità di T (data dalla condizione $d(T(\bar{x}), T(x_n)) \leq K \cdot d(\bar{x}, x_n)$), si deduce $\bar{x} = T(\bar{x})$, e dunque $\bar{x}$ è un punto fisso di T.

Supponendo $\hat{x} \in X$ sia un qualunque punto fisso di T, si ha $d(\hat{x}, \bar{x}) = d(T(\hat{x}), T(\bar{x})) \leq K \cdot d(\hat{x}, \bar{x})$, ossia $(1-K) \cdot d(\hat{x}, \bar{x}) \leq 0$, da cui $d(\hat{x}, \bar{x}) \leq 0$ e dunque $\hat{x} = \bar{x}$, ovvero l'unicità del punto fisso. □

Il principio delle contrazioni si applica nelle più svariate situazioni: ad esempio, per dimostrare il Teorema di Cauchy-Lipschitz di esistenza e unicità locale per soluzioni di problemi di Cauchy (per equazioni e sistemi di equazioni differenziali), oppure il Teorema del Dini delle funzioni implicite/inverse (esistenza e unicità locale per soluzioni di sistemi di equazioni algebriche non lineari), o anche per provare la dipendenza continua delle soluzioni di equazioni differenziali dai dati del problema. Inoltre, gli aspetti costruttivi e la stima quantitativa dell'errore hanno numerose applicazioni numeriche.

Esempio (non visto a lezione): metodo di Newton (o delle tangenti) per il calcolo degli zeri di una funzione non lineare $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Supponiamo $f \in C^2([a,b])$, e che per un certo $a < \bar{x} < b$ si abbia $f(\bar{x}) = 0$, che inoltre sia $|f'(x)| \geq m > 0$, $|f''(x)| \leq \delta$ e $|f(x)| \leq K m^2 \delta^{-1}\ \forall\, x \in [a,b]$, per un certo $K < 1$.

Lo schema di Newton per la determinazione di $\bar{x}$ consiste nella seguente successione definita per ricorrenza: fissato $a < x_0 < b$, si pone, per $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = T(x_n),$$

ed in particolare si ha $f(x) = 0$ se e solo se $x = T(x)$. Essendo $|T'(x)| = \frac{|f(x) \cdot f''(x)|}{|f'(x)|^2} \leq K$ per ogni $x \in [a,b]$, si ha, per il teorema del valor medio,

$$|T(y_1) - T(y_2)| = |T'(\xi)| \cdot |y_2 - y_1| \leq K |y_2 - y_1| \qquad \forall\, y_1, y_2 \in [a,b]\,,$$

ovvero T è una contrazione. Inoltre vale la stima dell'errore

$$|x_{n+1} - \bar{x}| = |T(x_n) - \bar{x}| \leq \frac{\delta}{2m} |x_n - \bar{x}|^2 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ (ovvero } \forall\, x_n \in [a, b]\,),$$

da cui si deduce che se $\min\{|a-\bar{x}|, |b-\bar{x}|\} \geq \frac{\delta}{2m} \max\{|a-\bar{x}|^2, |b-\bar{x}|^2\}$ vale $T([a,b]) \subset [a,b]$ (in soldoni, $|a - \bar{x}|$ e $|b - \bar{x}|$ devono avere lo stesso ordine di grandezza, inferiore a $\frac{2m}{\delta}$), e per il principio delle contrazioni lo schema di Newton converge a $\bar{x}$.

(Nota: per le ipotesi su f', questa ha un segno definito su $[a, b]$. Se anche f'' ha un segno definito su $[a, b]$, allora, se è ad esempio $f'(x) \geq m$ e $f''(x) \geq 0$, si ha automaticamente $T([\bar{x}, b]) \subset [\bar{x}, b]$, ovvero lo schema di Newton è monotono decrescente se $\bar{x} < x_0 \leq b$).

Lezione del 6 novembre 2015 (2 ore, [A], sezione 5.1, 5.2) Integrali multipli (doppi e tripli) per funzioni continue definite su un prodotto di intervalli. Definizione attraverso il limite di somme di Riemann: tale limite esiste per l'uniforma continuità di una funzione continua su un insieme compatto. Teorema di Fubini-Tonelli (formula dell'integrale iterato). Estensione della definizione al caso di domini normali rispetto agli assi coordinati: nel caso degli integrali doppi, se ad esempio $h_1, h_2 \in C^0([a, b]; \mathbb{R})$ e $D = \{(x, y),\ a \leq x \leq b\,,\ h_1(x) \leq y \leq h_2(x)\}$, ed inoltre $f \in C^0(D; \mathbb{R})$, si ha

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left[\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y)\, dy \right] dx\,.$$

Nel caso degli integrali tripli, se esistono funzioni continue $g_1(x, y)$ e $g_2(x, y)$ ed $h_1(x)$ e $h_2(x)$ tali che $D = \{(x, y, z),\ a \leq x \leq b\,,\ h_1(x) \leq y \leq g_2(x)\,,\ g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$, ed $f \in C^0(D; \mathbb{R})$, allora si ha

$$\iiint\limits_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b \left[\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right] dy \right] dx\,.$$

Calcolo di aree e volumi. Per $D \subset \mathbb{R}^2$ si ha $\text{Area}(D) = \iint_D dx\, dy$. Per $D \subset \mathbb{R}^3$ si ha $\text{Volume}(D) = \iiint_D dx\, dy\, dz$.

Proprietà degli integrali doppi e tripli: linearità rispetto all'integrando, additività rispetto al dominio, monotonia. Integrali di funzioni con simmetrie rispetto agli assi coordinati su domini simmetrici rispetto agli assi coordinati.

Teorema della media integrale per gli integrali multipli: se D è connesso per archi si ha che esiste $p_0 \in D$ tale che $f(p_0) = \bar{f} \equiv \frac{\iiint_D f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz}{\iiint_D dx\, dy\, dz}$.

Lezione del 9 novembre 2015 (3 ore, [A], sezione 5.1, 5.2, 5.3, 5.4)

Momenti primi e secondi di una distribuzione di massa (che si può interpretare come una distribuzione di probabilità se la massa totale è uguale a uno). Formula per il baricentro di figure piane o solide. Dato un solido che occupa una regione di spazio

$D \subset \mathbb{R}^3$ con densità di massa $\rho(x,y,z)$, le coordinate $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ del baricentro sono date dalla media pesata

$$\bar{x} = \frac{\iiint_D x\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz},$$
$$\bar{y} = \frac{\iiint_D y\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz},$$
$$\bar{z} = \frac{\iiint_D z\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}.$$

Momenti d'inerzia (momenti secondi) I_x, I_y rispetto agli assi x ed y di una figura piana D con densità di massa (rispettivamente di probabilità) $\rho(x,y)$: $I_y = \iint_D x^2\rho(x,y)\,dx\,dy$, $I_x = \iint_D y^2\,dx\,dy$. Assieme ai momenti $I_{xy} = \iint_D xy\rho(x,y)\,dx\,dy$ concorrono a formare la matrice di covarianza della distribuzione di probabilità $\rho(x,y)$ su D, che dà una misura di come la massa (risp. la densità di probabilità) si sparga attorno al proprio centro di massa (risp. attorno alla media). Momento polare d'inerzia $I_0 = I_x + I_y = \iint_D (x^2+y^2)\rho(x,y)\,dx\,dy$.

Formula di cambiamento di variabile negli integrali multipli: se $T : R \subset \mathbb{R}^n \to D = T(R) \subset \mathbb{R}^n$, è di classe C^1 ed iniettiva tranne al più sui punti della frontiera ∂R del dominio, allora, per $f \in C^0(D;\mathbb{R})$, posto $x = (x_1, ...x_n) = T(u_1, ..., u_n) = T(u)$, vale la formula

$$\int_D f(x)\,dx_1...dx_n = \int_R f(T(u)) \left| \det \frac{\partial\{T_1, ..., T_n\}}{\partial\{u_1, ..., u_n\}}(u) \right| du_1...du_n\,.$$

Uno dei passaggi chiave per ottenere la formula è l'espressione del volume del parallelepipedo n-dimensionale $P \subset \mathbb{R}^n$ generato da n vettori $v_j = (v_{1,j}, ...v_{n,j}) \in \mathbb{R}^n$, per $j = 1, ..., n$. Detta $A = [v_{i,j}]$ la matrice $n \times n$ le cui colonne sono date dai vettori v_j, si ha $\mathrm{vol}\,(P) = |\det A|$, come dimostrato in precedenza.

Idea della dimostrazione della formula di cambiamento di variabile: data una partizione di R in cubetti n-dimensionali generati dai vettori $\Delta u_1 \cdot e_1, ..., \Delta u_n \cdot e_n$, questa induce una partizione di D data dalle immagini dei cubetti, il cui volume n-dimensionale è approssimativamente dato dal volume del parallelepipedo generato da $dT(u) \cdot (\Delta u_1 \cdot e_1), ..., dT(u) \cdot (\Delta u_n \cdot e_n)$, ovvero dai vettori $\Delta u_1 \cdot \frac{\partial T}{\partial u_1}(u), ..., \Delta u_n \cdot \frac{\partial T}{\partial u_n}(u)$. Tale volume è dato da $|\det DT(u)|\Delta u_1...\Delta u_n$, e quindi la somma di Riemann di f su D si può esprimere come $\sum f(T(u))|\det DT(u)|\Delta u_1...\Delta u_n$, che converge al secondo membro della formula di cambiamento di variabili.

Calcolo di integrali superficiali di prima specie. Data una funzione $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ di classe C^1 ed una superficie $S = \{\vec{r}(u,v),\ (u,v) \in R \subset \mathbb{R}^2\} \subset D$ definita mediante una parametrizzazione di classe C^1 iniettiva tranne al più sul bordo ∂D, e regolare nel senso che $D\vec{r}$ ha rango massimo tranne al più al bordo di D (ossia le colonne di $D\vec{r}$ generano il piano tangente ad S), si definisce l'integrale superficiale di f su S come segue:

$$\iint_S f da := \iint_R f(\vec{r}(u,v)) \left| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right| dudv = \iint_R f(\vec{r}(u,v)) \sqrt{\det([D\vec{r}]^t \cdot [D\vec{r}])}\, dudv \,.$$

Proprietà: invarianza rispetto alla parametrizzazione, linearità rispetto all'integrando, additività rispetto al dominio.

Esercizi: calcolo di masse, baricentri, momenti d'inerzia di figure bidimensionali piane e curve.

Non svolto a lezione: calcolo dell'espressione del volume n-dimensionale $\mathrm{vol}_n(P_n)$ del parallelepipedo n-dimensionale $P_n \subset \mathbb{R}^n$ generato da n vettori linearmente indipendenti $v_j = (v_{1,j}, ...v_{n,j}) \in \mathbb{R}^n$, per $j = 1, ..., n$. Detta $A = [v_{i,j}]$ la matrice $n \times n$ le cui colonne sono date dai vettori v_j, si ha

$$\mathrm{vol}_n\,(P_n) = |\det A| \,.$$

Detto infatti P_{n-1} il parallelepipedo $(n-1)$-dimensionale generato da $v_1, ..., v_{n-1}$, sia $R \in SO(n)$ tale che per $w_j = Rv_j$, $i = 1, ..., n-1$ si abbia $w_{i,n} = 0$ (ovvero i vettori w_i giacciono nel sottospazio $(n-1)$-dimensionale ortogonale al versore e_n). Detta $B = [w_{i,j}]$ $i, j = 1, ..., n-1$ si ha, per ipotesi induttiva, $\mathrm{vol}_{n-1}\,(R(P_{n-1})) = |\det B|$, da cui

$$\mathrm{vol}_n\,(P_n) = \mathrm{vol}_n\,(R(P_n)) = |\det B| \cdot |w_{n,n}| = |\det(RA)| = |\det R \cdot \det A| = |\det A|.$$

Siano ora dati n vettori linearmente indipendenti $v_1, ..., v_n \in \mathbb{R}^m$, con $m > n$ e sia P_n il parallelepipedo in $\mathbb{R}^m$ da essi generato. Sia $V = [v_{i,j}]$, con $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$. Proviamo che vale la formula generale $vol_n(P_n) = \sqrt{\det(V^tV)}$.

Sia infatti $R \in SO(m)$ tale che, per $j = 1, ..., n$, $\langle Rv_j, e_i \rangle = 0$ per ogni $i > n$ (ovvero i vettori Rv_j giacciono nel sottospazio n-dimensionale di $\mathbb{R}^m$ generato da $e_1, ..., e_n$. Per quanto visto prima $vol_n(P_n) = vol_n(R(P_n)) = |\det A|$ dove A è il minore di $R \cdot V$ formato dalle prime n righe. Dato che le rimanenti righe di $R \cdot V$ sono identicamente nulle, si ha in particolare $A^tA = (RV)^tRV = V^t(R^tR)V = V^tV$. Essendo $\det(V^tV) = \det(A^tA) = \det A^t \cdot \det A = (\det A)^2$, si ottiene la formula cercata. $\square$

Si può inoltre verificare che vale

$$\mathrm{vol}_n(P_n) = \sqrt{\det(V^tV)} = \left(\sum_{k=1}^{\ell} (\det A_k)^2 \right)^{1/2} ,$$

dove $\ell = \frac{m!}{n!(m-n)!}$ e gli A_k sono i minori $n \times n$ di V.

Nel caso $n = 2$, $m = 3$, V la matrice le cui colonne sono date da $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$, si ottiene in particolare la formula

$$\sqrt{V^tV} = \|v_1 \times v_2\| \,,$$

ossia l'area del parallelogramma generato da due vettori corrisponde alla norma del loro prodotto esterno.

Lezione del 13 novembre 2015 (2 ore, [A], sezione 5.4, 5.5, 5.6, 5.7, 6.5) Esempi di calcolo di integrali multipli utilizzando particolari trasformazioni di coordinate. Area di un'ellisse, volume di un ellissoide. Trasformazione degli integrali doppi in coordinate polari. Volume di una sfera.

Calcolo di $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$. Si consideri la funzione $f(x,y) = e^{-x^2-y^2} = e^{-x^2}e^{-y^2}$, e la si integri sui quadrati $[-R,R]^2$. Si ha

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2}e^{-y^2}\,dxdy = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} e^{-y^2}\left[\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx\right]dy = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right]^2 .$$

D'altra parte, trasformando in coordinate polari ed integrando su cerchi di centro l'origine e raggio R, si ha

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \lim_{R\to+\infty}\int_0^R\left[\int_0^{2\pi} e^{-r^2}r\,d\theta\right]dr = \pi\,,$$

da cui la formula $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

Formula dell'area per superfici cartesiane di classe C^1 (ovvero superfici grafico di una funzione di due variabili). Data la parametrizzazione cartesiana $\vec{r}(x,y) = (x,y,z(x,y))$ di una superficie S grafico della funzione $z(x,y)$ su un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ si ha

$$Area(S) = \iint_S da := \iint_D \sqrt{1+|\nabla z|^2}\,dxdxy\,,$$

dove da indica l'elemento d'area della superficie: la definizione discende dal fatto che il fattore di dilatazione locale delle aree indotto dalla parametrizzazione cartesiana $\vec{r}$ è dato da $|\partial_x\vec{r}\wedge\partial_y\vec{r}| = \sqrt{1+(\partial_x z)^2+(\partial_y z)^2}$.

Esempio di calcolo di integrali superficiali di funzioni scalari: area di una superficie sferica, momento d'inerzia $I_z = \iint_S (x^2+y^2)\,da$ di una massa di densità unitaria distribuita sulla superficie S.

Calcolo di integrali superficiali di prima specie. Data una funzione $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ di classe C^1 ed una superficie $S = \{\vec{r}(u,v),\ (u,v) \in R \subset \mathbb{R}^2\} \subset D$ definita mediante una parametrizzazione di classe C^1 iniettiva tranne al più sul bordo ∂D, e regolare nel senso che $D\vec{r}$ ha rango massimo tranne al più al bordo di D (ossia le colonne di $D\vec{r}$ generano il piano tangente ad S), si definisce l'integrale superficiale di f su S come segue:

$$\iint_S f da := \iint_R f(\vec{r}(u,v))\left|\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}\right| dudv = \iint_R f(\vec{r}(u,v))\sqrt{\det([D\vec{r}]^t\cdot[D\vec{r}])}\,dudv\,.$$

Proprietà: invarianza rispetto alla parametrizzazione, linearità rispetto all'integrando, additività rispetto al dominio.

Esercizi: calcolo di masse, baricentri, momenti d'inerzia di figure bidimensionali.

Integrali curvilinei di prima specie. Data una funzione continua $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ed una curva parametrizzata $\gamma : [a, b] \to D$ di classe C^1 e iniettiva tranne al più agli estremi (ovvero una curva *semplice*), regolare nel senso che $\dot\gamma(t) \neq 0$ per ogni t, detto $\Gamma = \{\gamma(t)\,,\ a \le t \le b\}$ il suo sostegno, si definisce l'integrale curvilineo (di prima specie) di f lungo Γ come segue:

$$\int_\Gamma f\, d\ell := \int_a^b f(\gamma(t))|\dot\gamma(t)|dt = \int_a^b f(x_1(t), ..., x_n(t))\sqrt{\sum_{i=1}^n \dot x_i^2}\, dt\,.$$

Proprietà: indipendenza dalla parametrizzazione, linearità rispetto all'integrando f, additività rispetto alla curva Γ (ossia, se $\Gamma = \cup_i \Gamma_i$ con $\Gamma_i = \{\gamma_i(t)\,,\ a_i \le t \le b_i\}$, γ_i di classe C^1 e iniettiva, $\gamma_{i-1}(b_{i-1}) = \gamma_i(a_i)$ per ogni i, si ha $\int_\Gamma f d\ell = \sum_i \int_{\Gamma_i} f d\ell$).

L'integrale curvilineo di prima specie si utilizza per il calcolo di lunghezze di curve (caso $f \equiv 1$), masse di oggetti filiformi (se f rappresenta la densità lineare dell'oggetto) o baricentri e/o momenti d'inerzia (rispettivamente nel caso $f(x_1, ..., x_n) = x_i$, oppure f rappresenti la distanza al quadrato da un asse, come ad esempio $f(x, y, z) = x^2 + y^2$, la distanza al quadrato dall'asse z).

Osservazione: nel caso Γ sia immagine di una parametrizzazione $\gamma \in C^0([a, b])$ (iniettiva tranne al più agli estremi), si dà la seguente nozione di lunghezza:

$$L(\Gamma) = \sup\left\{\sum_{i=1}^N |p_i - p_{i-1}|,\quad p_i = \gamma(t_i)\,, a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b\right\}\,.$$

Se $L(\Gamma) < +\infty$ si dice che la curva è *rettificabile.*

Esercizi: Calcolo della lunghezza di un arco di cicloide.

Lezione del 16 novembre 2015 (3 ore, [A], sezione 6.2, 6.3, 6.4, 6.2, 7.1, 7.2, 7.3, 8.1) Integrale curvilineo (detto di seconda specie, o orientato) per campi vettoriali su curve orientate (corrisponde alla nozione di lavoro compiuto da una forza lungo una curva): se $F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un campo di vettori continuo e $\Gamma \subset D$ è una curva orientata di primo estremo A e secondo estremo B, parametrizzata mediante $\gamma : [a, b] \to D$, con $\gamma(a) = A$ e $\gamma(b) = B$, di classe C^1 iniettiva tranne al più agli estremi, si pone

$$\int_\Gamma F \cdot d\vec\ell \equiv \int_\Gamma < F, \tau > d\ell := \int_a^b < F(\gamma(t)), \dot\gamma(t) > dt\,,$$

dove $d\ell$ indica l'elemento di linea sulla curva Γ, τ è il vettore tangente unitario che ne definisce l'orientazione e $d\vec\ell \equiv \tau d\ell$.

Notazione con le 1-forme differenziali (per semplicità, consideriamo il caso $n = 3$): se $F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ è un campo di vettori, si considera l'applicazione

$$\omega : p = (x, y, z) \mapsto \omega(p) = F_1(x, y, z)dx + F_2(x, y, z)dy + F_3(x, y, z)dz$$

che ad ogni punto p associata l'applicazione lineare $\omega(p)$. Una tale applicazione si dice 1-forma differenziale. La forma differenziale ω è l'oggetto duale del campo di vettori F, ossia se $F(p) = F_1(p)e_1 + F_2(p)e_2 + F_3(p)e_3$ è rappresentato da un vettore colonna, $\omega(p)$ corrisponde al vettore riga $F(p)^t = F_1(p)e_1^t + F_2(p)e_2^t + F_3(p)e_3^t$, dove si ricorda l'identificazione $e_1^t \equiv dx$, $e_2^t \equiv dy$, $e_3^t \equiv dz$ quando si è affrontata la nozione di differenziale di una funzione di più variabili.

Data una forma differenziale ω associata al campo di vettori F, e Γ curva orientata dalla parametrizzazione regolare e $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, si pone

$$\int_\Gamma < F, \tau > d\ell \equiv \int_\Gamma \omega \cdot \tau \, d\ell \equiv \int_\Gamma \omega \equiv \int_\Gamma F_1(x, y, z)dx + F_2(x, y, z)dy + F_3(x, y, z)dz$$
$$:= \int_a^b F_1(x(t), y(t), z(t))\dot{x}(t) + F_2(x(t), y(t), z(t))\dot{y}(t) + F_3(x(t), y(t), z(t))\dot{z}(t) \, dt \,.$$

La notazione dell'integrale curvilineo orientato mediante forme differenziali è "naturale" rispetto alla formula di cambiamento di variabile negli integrali.

Proprietà dell'integrale curvilineo orientato: indipendenza dalla parametrizzazione (a meno dell'orientazione (indotta dalla parametrizzazione) di Γ), linearità rispetto al campo di vettori, additività rispetto alla curva (in particolare l'integrale curvilineo rimane definito per curve regolari a tratti).

Dipendenza dall'orientazione di Γ dell'integrale curvilineo: se indichiamo con Γ_{AB} la curva Γ orientata con primo estremo A e secondo estremo B e Γ_{BA} la stessa curva in cui si considera B come primo estremo ed A come secondo estremo, si ha

$$\int_{\Gamma_{BA}} F \cdot d\vec{\ell} = - \int_{\Gamma_{AB}} F \cdot d\vec{\ell} \,.$$

Se l'orientazione di Γ_{AB} è indotta dalla parametrizzazione $t \mapsto \gamma(t)$ per $t \in [a, b]$, allora l'orientazione di Γ_{BA} è definita ad esempio dalla parametrizzazione $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(b + a - t)$, valendo $\dot{\tilde{\gamma}}(t) = -\dot{\gamma}(t)$.

Teorema fondamentale del calcolo per gli integrali curvilinei di seconda specie: se F è un *campo conservativo*, ovvero se $F = \nabla\phi$, cioè F è il gradiente di una funzione (detta *potenziale scalare*) ϕ, si ha

$$\int_{\Gamma_{AB}} < \nabla\phi, \tau > d\ell = \int_a^b \langle \nabla\phi(\gamma(t), \gamma'(t) \rangle \, dt = \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\phi(\gamma(t)) \right) \, dt = \phi(B) - \phi(A) \,.$$

Nel formalismo delle forme differenziali si ha che la forma differenziale ω corrispondente al campo consevativo F è un differenziale esatto (o una forma differenziale esatta), ovvero $\omega = d\phi$, e si ha

$$\int_{\Gamma_{AB}} d\phi = \int_{\Gamma_{AB}} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial \phi}{\partial x_n} dx_n = \phi(B) - \phi(A).$$

In particolare, l'integrale curvilineo di un campo conservativo dipende solamente dagli estremi della curva Γ, e dunque non cambia se calcolato lungo una qualsiasi altra curva che congiunga A a B.

Si osservi che se $\phi(p)$ è una funzione potenziale per il campo conservativo $F(p)$, anche $\phi(p) + C$ lo è, per $C \in \mathbb{R}$. Se il dominio su cui si considera $F(p)$ è connesso per archi, una funzione potenziale sarà necessariamente della forma $\phi(p) + C$ con C costante reale (in buona sostanza, il potenziale è definito a meno di una costante).

Esempi di campi conservativi: il campo elettrostatico/gravitazionale generato da una carica/massa puntiforme posta nell'origine, dato da $\vec{F}(x, y, z) = \pm C \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ è conservativo. Si ha $\vec{F} = \nabla \phi$, con $\phi(x, y, z) = \pm C \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Il campo di una forza di richiamo elastica $F(x, y, z) = -k(x, y, z)$ è conservativo: si ha $F = \nabla \phi$ con $\phi(x, y, z) = -\frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$.

Condizioni equivalenti alla proprietà di essere conservativo su un dato dominio D per un campo di vettori di classe C^0: indipendenza (dell'integrale curvilineo) dalla traiettoria, circuitazione (ovvero integrale curvilineo lungo curve chiuse) nulla.

Determinazione di una funzione potenziale per un campo conservativo $F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *(non svolto a lezione, si veda la sessione di esercitazioni corrispondente)*: fissato $p_0 \in D$, si pone $\phi(p) = \int_{\Gamma_{p_0 p}} F \cdot ds$, dove, per $p \in D$, $\Gamma_{p_0 p}$ è una curva orientata che collega p_0 a p. La definizione è consistente, per l'indipendenza dalla traiettoria. Dimostriamo che ad esempio $\frac{\partial \phi}{\partial x}(p) = F_1(p)$, la prima componente di F: detto $S = \{p + te_1\ ,\ 0 \leq t \leq h\}$ il segmento che unisce p a $p + he_1$, si ha

$$\begin{aligned} \frac{\phi(p + he_1) - \phi(p)}{h} &= \frac{1}{h} \int_S F \cdot ds = \frac{1}{h} \int_0^h < F(p + te_1), e_1 > dt \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h F_1(p + te_1) dt = F_1(p + \bar{t}e_1) \end{aligned}$$

per un certo $0 \leq \bar{t} \leq h$. La conclusione segue passando al limite per $h \to 0$, stante la continuità di F_1. Si deducono in particolare dei metodi di calcolo del potenziale di un campo conservativo (in $\mathbb{R}^2$): dovendo essere, a y fissato, $\phi(x, y) = \int_{x_0}^x F_1(x, y)\, dx$, posto $G(x, y) = \int F_1(x, y)\, dx$ (integrale indefinito), si avrà $\phi(x, y) = G(x, y) + C(y)$, e $C(y)$ si ottiene risolvendo l'equazione differenziale $C'(y) = F_2(x, y) - \frac{\partial G(x,y)}{\partial y}$. Il potenziale risulta definito a meno di una costante.

Condizione necessaria affinché un campo F di classe C^1 sia conservativo in un dominio $A \subset \mathbb{R}^n$ è che la matrice Jacobiana DF sia una matrice simmetrica (infatti, se $F = \nabla\phi$ in A allora $DF = D^2\phi$, che è simmetrica per il teorema di Schwarz). In dimensione due e tre, tale condizione si traduce nella condizione sulle derivate incrociate

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}, \qquad \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z}, \qquad \frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}.$$

Tale condizione è anche sufficiente su domini convessi (Lemma di Poincaré), ma anche su domini più generali, i cosiddetti insiemi semplicemente connessi.

Nozione intuitiva di insieme *semplicemente connesso* (viene qui data la definizione in $\mathbb{R}^2$): $A \subset \mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso se per ogni $\Gamma \subset A$ curva semplice chiusa, si ha $\Gamma = \partial D$ con $D \subset A$ (Γ è il bordo di un dominio *interamente* contenuto in A).

Esempi di insiemi semplicemente connessi in $\mathbb{R}^n$: palle, insiemi convessi, insiemi stellati. In $\mathbb{R}^2$ sono semplicemente connessi gli insiemi connessi privi di "buchi". Esempi di insiemi non semplicemente connessi nel piano sono le corone circolari, o aperti connessi privati di un numero finito di punti.

La condizione DF simmetrica su un dominio A semplicemente connesso è sufficiente affinchè F sia conservativo in A. In particolare, se DF è simmetrica su un dominio A qualunque, dato che ogni palla è semplicemente connessa, si ha che F ammette *localmente* un potenziale (che può non essere globalmente ben definito su A se A non è semplicemetne connesso).

Dimostrazione della sufficienza della condizione nel caso di domini convessi o stellati nel piano (Lemma di Poincaré, *non svolto a lezione*) : sia $D \subset \mathbb{R}^2$ contenente l'origine, convesso (basta che sia stellato rispetto all'origine) e sia $p = (x, y) \in D$. Definiamo $\phi(x, y) = \int_0^1 xF_1(tx, ty) + yF_2(tx, ty)\, dt$ (lavoro di F lungo il segmento di estremi $(0, 0)$ e (x, y)). Grazie al teorema di derivazione sotto il segno di integrale, valido per integrandi di classe C^1 e la condizione $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$ si ottiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(xF_1(tx, ty) + yF_2(tx, ty)\right)\, dt \\
&= \int_0^1 F_1(tx, ty) + tx\frac{\partial F_1}{\partial x}(tx, ty) + ty\frac{\partial F_2}{\partial x}(tx, ty)\, dt \\
&= \int_0^1 F_1(tx, ty) + tx\frac{\partial F_1}{\partial x}(tx, ty) + ty\frac{\partial F_1}{\partial y}(tx, ty)\, dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(tF_1(tx, ty)\right)\, dt = F_1(x, y).
\end{aligned}$$

Analogamente si ottiene $\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) = F_2(x, y)$. □

Definizione di rotore di un campo vettoriale F in $\mathbb{R}^3$: si pone

$$\nabla \times F \equiv \operatorname{rot} F = e_1\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) - e_2\left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right) + e_3\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right).$$

Campi irrotazionali su un dominio $A \subset \mathbb{R}^3$: sono quelli per cui il rotore si annulla su A, ovvero la matrice acobiana del campo è simmetrica. In particolare un campo conservativo in un dominio $A \subset \mathbb{R}^3$ è necessariamente irrotazionale in A, e vale il viceversa su domini convessi (Lemma di Poincarè) o più in generale semplicemente connessi.

La forma differenziale ω associata ad un campo irrotazionale si dice forma differenziale chiusa. In particolare, ogni forma esatta è necessariamente chiusa, mentre il viceversa è vero solo su domini semplicemente connessi.

Rotore di un campo vettoriale F in $\mathbb{R}^2$: se lo si interpreta come il rotore di un campo avente la terza componente nulla, si ottiene $\operatorname{rot} F = e_3(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})$, ovvero un campo con una sola componente non nulla (assimilabile quindi ad un campo scalare).

Esempio: calcolo del rotore del campo V che descrive la velocità di rotazione di un fluido (o di un solido) attorno all'asse z corrispondente ad una velocità angolare uniforme Ω (a lezione abbiamo visto il caso $\Omega = 1$). Si ha $V = \Omega(-y, x) = \vec{\Omega} \wedge \vec{r} = \Omega r \hat{\imath}_\theta$, dove $\vec{\Omega} = \Omega\, e_3$ rappresenta il vettore velocità angolare, $\vec{r} = x e_1 + y e_2 = r \hat{\imath}_r$ esprime la componente orizzontale di $p = (x, y, z)$ e $\hat{\imath}_r, \hat{\imath}_\theta$ indicano i versori radiale e angolare (o trasverso). Si ha $\operatorname{rot} V = 2\vec{\Omega} = 2\Omega e_3$.

In generale, se $\vec{\Omega}(p) = \operatorname{rot} F(p)$ è il rotore del campo F nel punto p, detto $\Omega(p) = |\vec{\Omega}(p)|$ e $\vec{e}(p) = \frac{1}{\Omega(p)}\vec{\Omega}(p)$, interpretando $F(p)$ come il campo di velocità di un fluido, si ha che la direzione $\vec{e}(p)$ del rotore individua asse e verso di rotazione (secondo la regola della mano destra) dei punti del fluido nell'intorno (infinitesimo) del punto dato, mentre il modulo $\Omega(p)$ misura la velocità angolare di rotazione dei punti dell'intorno (infinitesimo) del punto dato attorno a tale asse.

Esempio fondamentale: il campo vettoriale

$$F(x, y) = (\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}) = \frac{1}{r}\hat{\imath}_\theta$$

è irrotazionale su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Tuttavia non è conservativo su tutto il suo dominio di definizione, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (che è un insieme non semplicemente connesso), in quanto il suo integrale curvilineo lungo una circonferenza di centro l'origine è diverso da zero.

Equivalentemente, la forma differenziale $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ è chiusa ma non è esatta su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Si osservi che sul dominio $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0,\ x > 0\}$, che è semplicemente connesso, si ha $F = \nabla\theta$, (o equivalentemente $\omega = d\theta$), dove θ è la funzione angolare definita dalla funzione inversa della trasformazione in coordinate polari $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ ristretta a $(0, +\infty) \times (0, 2\pi)$ (ad esempio, per $x > 0$ si ha $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$).

Formule di Gauss-Green nel piano: sia $F = (F_1, F_2) : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale di classe C^1, sia $D \subset A$ un dominio tale che $\Gamma = \partial D$ sia una curva semplice chiusa di classe C^1 a tratti. Allora vale

$$\oint_\Gamma F_1 dx + F_2 dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy\,,$$

dove Γ è orientata in senso antiorario. Si tratta di una versione per gli integrali doppi del teorema fondamentale del calcolo, che mette in relazione la circuitazione di un campo piano con l'integrale doppio della componente z del suo rotore.

Dimostrazione del teorema di Gauss-Green nel caso di domini normali rispetto ad entrambi gli assi coordinati.

Applicazioni della formula di Gauss-Green: calcolo di aree di figure piane mediante integrazione sul loro contorno, calcolo di circuitazioni mediante integrali doppi.

Esempio: se $F = \frac{1}{2}(-y, x)$ (ovvero il campo di velocità di rotazione attorno all'asse z con velocità angolare uniforme $\Omega = \frac{1}{2}$), si ottiene, ricordando che $\operatorname{rot} F = e_3$,

$$\frac{1}{2}\oint_{\Gamma} -y\,dx + x\,dy = \iint_D dxdxy = \mathrm{Area}(D)\,.$$

Lezione del 20 novembre 2015 (2 ore, [A], sezione 6.6, 7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 7.5, 8.1, 8.2, 8.5) Rivisitazione del Teorema di Gauss-Green nel piano alla luce degli integrali orientati: la formula si può scrivere

$$\int_{\partial D} \langle F, \tau\rangle d\ell = \iint_D \langle \operatorname{rot} F, n\rangle da\,,$$

dove il dominio D giace in un piano orizzontale di $\mathbb{R}^3$, è orientato dal versore normale diretto verso l'alto $n = e_3$, ed il bordo ∂D è una curva semplice di classe C^1 a tratti orientata in senso antiorario dal versore τ, ovvero n e τ soddisfano la regola della mano destra, con n facente le veci del pollice.

L'integrale a secondo membro è un un integrale orientato di superficie, ovvero un integrale di *flusso*: se $\operatorname{rot} F = V$ è il campo di velocità di un fluido avente densità unitaria, tale integrale serve a misurare la quantità di fluido che passa attraverso D nell'unità di tempo.

Integrali superficiali di seconda specie (o integrali di flusso): sia $V : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale continuo, ed $S \subset A$ una superficie parametrizzata da $\vec{r}(u, v)$, di classe C^1, $(u, v) \in R \subset \mathbb{R}^2$. Si definisce

$$\iint_S \langle V, n\rangle da := \iint_R \langle V(\vec{r}(u, v)), \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v)\rangle\, dudv\,.$$

Proprietà degli integrali orientati di superficie: a parità di orientazione n, indipendenza dalla parametrizzazione $\vec{r}$ (conseguenza della formula di cambiamento di variabili negli integrali doppi); linearità rispetto ad F, additività rispetto a S.

Consideriamo la formula di Gauss-Green: in virtù dell'invarianza per isometrie di $\mathbb{R}^3$ di ambo i membri della formula, quest'ultima si estende per additività al caso D superficie triangolata di $\mathbb{R}^3$, e, per passaggio al limite, al caso delle superfici di classe C^1. Più precisamente, vale il Teorema di Stokes: sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfice con bordo ∂S, entrambi orientati da una parametrizzazione data $\vec{r}: R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ di classe C^1, rango $D\vec{r}$ massimo e iniettiva sino al bordo ∂R, dove può risultare di classe C^1 a tratti. Allora si ha $\int_{\partial S} \langle F, \tau \rangle d\ell = \iint_S \langle \operatorname{rot} F, n \rangle da$ per ogni campo vettoriale F di classe C^1 definito in un intorno di S.

Data $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ una curva semplice chiusa orientata, supponiamo $\Gamma = \partial S = \partial S'$ per due superfici S e S' orientate in modo da rispettare la regola della mano destra rispetto all'orientazione di Γ. Allora dal Teorema di Stokes si deduce che per ogni campo vettoriale A, $\iint_S \langle \operatorname{rot} A, n \rangle da = \iint_{S'} \langle \operatorname{rot} A, n \rangle da$, ovvero il flusso di un rotore attraverso una superficie a bordo fissato è indipendente dalla superficie. Equivalentemente, se Σ è una superficie orientata chiusa, ovvero $\partial\Sigma = \emptyset$ (è questo il caso in cui $\Sigma = \partial U$ con $U \subset \mathbb{R}^3$ aperto con bordo di classe C^1 a tratti) si ha $\iint_\Sigma \langle \operatorname{rot} A, n \rangle da = 0$, ovvero il flusso di un rotore attraverso una superficie chiusa è nullo. Quindi i campi vettoriali V che sono rotori di altri campi vettoriali A (ossia $V = \operatorname{rot} A$), giocano dal punto di vista degli integrali di superficie orientati lo stesso ruolo che giocano i campi conservativi (ossia i gradienti) nel caso degli integrali curvilinei di seconda specie. Se $V = \operatorname{rot} A$, il campo A viene detto potenziale vettore di V. L'esempio classico di un campo che ammette potenziale vettore è costituito dal campo magnetico $\vec{B}$, oppure dal campo di velocità di un fluido stazionario incomprimibile.

Divergenza di un campo vettoriale $V : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Si tratta della quantità scalare $\operatorname{div} V = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}$. Una condizione necessaria affinchè un campo di classe C^1 sia il rotore di un potenziale vettore è che abbia divergenza nulla, ovvero che sia solenoidale. Si ha cioè che $V = \operatorname{rot} A$ in un dominio $D \subset \mathbb{R}^3$ implica $\operatorname{div} V = 0$ su D. Tale risultato è conseguenza del teorema di Schwarz.

La condizione non è in generale sufficiente: si prenda ad esempio $V(p) = -\frac{i_r}{r^2} = -\frac{p}{|p|^3}$ il campo gravitazionale (o elettrostatico) generato da una massa (o carica elettrica negativa) puntiforme situata nell'origine di $\mathbb{R}^3$. Si verifica che tale campo è a divergenza nulla nel suo dominio di definizione $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, ma non è il rotore di alcun campo vettoriale definito sull'intero dominio $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, in quanto detta Σ la superficie sferica di centro l'origine e raggio $R > 0$ (Σ è una superficie chiusa) orientata dalla normale esterna costituita dal versore radiale $i_r = \frac{p}{|p|}$, si ha

$$\iint_\Sigma \langle V, n \rangle da = \iint_\Sigma \langle -\frac{i_r}{R^2}, i_r \rangle da = -\frac{1}{R^2} \int_\Sigma da = -4\pi \neq 0.$$

La condizione $\operatorname{div} F = 0$ risulta sufficiente affinchè sia $F = \operatorname{rot} A$ ad esempio su domini convessi (Lemma di Poincaré). In realtà detta implicazione è vera su domini D che verificano certe ipotesi meno stringenti (in buona sostanza, se per ogni superficie chiusa S in D, si ha $S = \partial U$ con U interamente contenuto in D, ovvero se D non ha "buchi").

Teorema della divergenza (o di Gauss): sia $U \subset \mathbb{R}^3$ un dominio con bordo ∂U costituito da una superficie chiusa di classe C^1 a tratti, orientata dalla normale esterna a U, e sia V un campo vettoriale di classe C^1 definito su un aperto $A \supset U$. Si ha

$$\iint_{\partial U} \langle V, n \rangle da = \iiint_U \operatorname{div} V \, dxdydz \, .$$

Il teorema della divergenza in $\mathbb{R}^3$ è una generalizzazione del teorema fondamentale del calcolo, così come il teorema di Stokes per superfici in $\mathbb{R}^3$, o il teorema di Gauss-Green nel piano.

Applicazione del teorema della divergenza al calcolo di volumi: il campo $V(p) = p = (x, y, z)$ ha divergenza $\operatorname{div} V = 3$, e dunque, per una data regione U a frontiera regolare ∂U si ha $3 \cdot \mathrm{vol}\,(U) = \iint_{\partial U} \langle p, n \rangle \, da$.

Esempio: volume di un cono circolare retto C di altezza h e raggio di base R con vertice nell'origine e base $B = \{p \equiv (x, y, h),\ x^2 + y^2 \leq R^2\}$ giacente nel piano orizzontale $z = h$. Dato che $\langle p, n \rangle = 0$ sulla superficie laterale del cono, mentre su B si ha $\langle p, n \rangle = \langle p, e_3 \rangle = h$, si ha

$$3 \cdot \mathrm{vol}(C) = \iint_B \langle p, e_3 \rangle da = \iint_B h \, da = h \cdot \mathrm{Area}\,(B),$$

si ottiene la nota formula per il volume del cono, dato da un terzo dell'area di base per l'altezza.

Interpretazione fisica della divergenza: se il rotore di un campo vettoriale (visto come campo di velocità di un fluido) ne misura la "vorticità", la divergenza ne individua "sorgenti" e "pozzi": infatti dal teorema della divergenza si deduce che il flusso netto di un fluido attraverso una superficie chiusa è determinato dalla divergenza del campo di velocità del fluido nel volume racchiuso dalla superficie. Se la divergenza è diversa da zero anche il flusso netto attraverso la superficie sarà in generale diverso da zero, e ciò sta a significare che all'interno della superficie data vi sono sorgenti o pozzi per il fluido.

lezione del 24 novembre 2015 (1 ora). Rivisitiamo la teoria precedente con il formalismo delle forme differenziali (in $\mathbb{R}^3$): dato un campo di vettori $F = (F_1, F_2, F_3)$, ad esso è associata la 1-forma $\omega = F_1(x, y, z)dx + F_2(x, y, z)dy + F_3(x, yz)dz$ (in coordinate, se F è un vettore colonna, ω è il vettore riga corrispondente a F^t. La forma ω si dice *esatta* se $\omega = d\phi$, ovvero se è il differenziale di una certa funzione scalare ϕ (se e solo se $F = \nabla\phi$).

Ad un campo di vettori $V = (V_1, V_2, V_3)$ possiamo associare anche la 2-forma $\omega = V_1 dy \wedge dz + V_2 dz \wedge dx + V_3 dx \wedge dy$, dove $\wedge$ definisce un prodotto *anticommutativo* (associativo, distributivo rispetto alla somma) tra forme differenziali con il quale si possono definire elementi d'area orientati: ad esempio $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ identifica un elemento d'area orientato su un piano orizzontale.

Estendiamo alle 1-forme l'operatore d (differenziale esterno) come segue: per $\omega = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ si pone $d\omega = dF_1 \wedge dx + dF_2 \wedge dy + dF_3 \wedge dz$. La 2-forma $d\omega$ è associata al campo di vettori $V = \mathrm{rot}\, F$. Analogamente, data la 2-forma $\omega = V_1 dy \wedge dz + V_2 dz \wedge dx + V_3 dx \wedge dy$ si avrà $d\omega = (\operatorname{div} V) dx \wedge dy \wedge dz$.

Nota: se $d\omega = 0$ in un dominio D, si dice che ω è *chiusa* in D. Per il Teorema di Schwarz una forma esatta è chiusa, ovvero $d(d\omega) = 0$, mentre il viceversa è vero in generale solo localmente, o se D soddisfa ad alcune ipotesi topologiche (verificate ad esempio se D è una palla, o un insieme convesso o stellato).

Notazione degli integrali di flusso con le forme differenziali: se $V = (V_1, V_2, V_3)$ e dx, dy, dz rappresentano i differenziali delle funzioni coordinate $p \equiv (x, y, z) \mapsto x$, $p \mapsto y$, $p \mapsto z$, si pone

$$\iint_S \langle V, n \rangle da = \iint_S V_1 dy \wedge dz - V_2 dx \wedge dz + V_3 dx \wedge dy \,,$$

Volendo leggere la formula precedente attraverso la parametrizzazione $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, dato che

$$dx(u,v) = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \quad dy(u,v) = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv, \quad dz(u,v) = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv,$$

si ha

$$dx(u,v) \wedge dy(u,v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \wedge \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) = \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} du \wedge dv,$$

e similmente

$$dz(u,v) \wedge dx(u,v) = \det \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} du \wedge dv, \qquad dy(u,v) \wedge dz(u,v) = \det \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} du \wedge dv \,.$$

si ottiene pertanto la formula

$$\iint_S V_1 dy \wedge dz - V_2 dx \wedge dz + V_3 dx \wedge dy = \iint_R \left[V_1 \det \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} - V_2 \det \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)} + V_3 \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right] du \wedge dv,$$

che è consistente con la definizione di integrale di flusso, dato che vale precisamente

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \left(\det \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \det \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right) \,.$$

Teorema di Stokes con il formalismo delle forme differenziali: per $\omega = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ si ha

$$d\omega = dF_1 \wedge dx + dF_2 \wedge dy + dF_3 \wedge dz.$$

Sviluppando i calcoli si ottiene la 2-forma $d\omega = V_1 dy \wedge dz - V_2 dx \wedge dz + V_3 dx \wedge dy$, dove il campo di vettori V coincide con il rotore di F.

In particolare, la formula di Stokes si scrive

$$\int_{\partial S} \omega = \iint_S d\omega \,.$$

Teorema della divergenza nel formalismo delle forme differenziali: data la 2-forma $\omega = V_1 dy \wedge dz - V_2 dx \wedge dz + V_3 dx \wedge dy$ rimane definita la 3-forma differenziale $d\omega = dV_1 dy \wedge dz - dV_2 dx \wedge dz + dV_3 dx \wedge dy = (\operatorname{div} V) dx \wedge dy \wedge dz$. Il termine $dx \wedge dy \wedge dz$ si può identificare ad un elemento di volume orientato, ne consegue che una 3-forma differenziale è l'oggetto "naturale" per gli integrali tripli orientati. Il teorema della divergenza si può riassumere pertanto, in perfetta analogia al teorema di Stokes, nella formula

$$\iint_{\partial U} \omega = \iiint_U d\omega\,.$$

(Non svolto a lezione). Dimostrazione del teorema della divergenza nel caso di domini U normali rispetto a tutti e tre gli assi coordinati: dimostriamo ad esempio che la formula è vera nel caso $V = (0,0,V_3)$. Il caso generale segue per linearità. Possiamo descrivere U in forma normale rispetto all'asse z, ovvero $U = \{(x,y) \in R,\ g_1(x,y) \leq z \leq g_2(x,y)\}$, con $R \subset \mathbb{R}^2$ un dominio regolare e $g_i : R \to \mathbb{R}$ di classe C^1 per $i = 1,2$. Si ha, da una parte,

$$\begin{aligned}\iiint \operatorname{div} V\, dxdydz &= \iint_R \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} \frac{\partial V_3}{\partial z}\, dz\right] dxdy\\ &= \iint_R [V_3(x,y,g_2(x,y)) - V_3(x,y,g_1(x,y))]\ dxdy.\end{aligned}$$

D'altro canto, $\partial U = \Gamma_{g_2} \cup \Gamma_{g_1} \cup \Sigma$ con $\Sigma \subset \partial R \times \mathbb{R}$ un'eventuale superficie laterale a normale orizzontale. In particolare, $\iint_\Sigma \langle V_3 e_3, n\rangle da = 0$. Tenuto conto delle orientazioni di Γ_{g_2} (normale verso l'alto) e Γ_{g_1} (normale verso il basso), si ha inoltre

$$\begin{aligned}\iint_{\Gamma_{g_2}} \langle V_3 e_3, n\rangle da &= \iint_R \langle (0,0,V_3(x,y,g_2(x,y))), (-\frac{\partial g_2}{\partial x}, -\frac{\partial g_2}{\partial y}, 1)\rangle\, dxdy\\ &= \iint_R V_3(x,y,g_2(x,y))\, dxdy\,,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\iint_{\Gamma_{g_1}} \langle V_3 e_3, n\rangle da &= \iint_R \langle (0,0,V_3(x,y,g_1(x,y))), (\frac{\partial g_1}{\partial x}, \frac{\partial g_1}{\partial y}, -1)\rangle\, dxdy\\ &= -\iint_R V_3(x,y,g_1(x,y))\, dxdy\,.\end{aligned}$$

La somma dei flussi è pertanto uguale all'integrale triplo della divergenza di V su U, come volevasi dimostrare. □

Lezione del 2 dicembre 2015 (2 ore. [D], sezioni 7.1 e 9.1, 9.1.4, 9.1.8, 9.5.3, 9.2.2). Spazi metrici. Proprietà assiomatiche di una funzione distanza su un insieme: positività, simmetria, diseguaglianza triangolare. Esempi di spazi metrici: $\mathbb{R}$ ed $\mathbb{R}^n$ dotati della distanza euclidea. Distanza geodetica tra due punti su una superficie sferica: è il minimo delle lunghezze delle curve sulla superficie che congiungono i punti dati (si tratta della lunghezza di un arco di cerchio massimo).

Spazi normati. Proprietà assiomatiche di una norma su uno spazio vettoriale: positività, positiva 1-omogeneità, disuguaglianza triangolare. Esempi: il valore assoluto su $\mathbb{R}$, la norma euclidea $\|\cdot\|$ su $\mathbb{R}^n$.

Definizione di norma ℓ^∞ su $\mathbb{R}^n$: per $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, si pone $||x||_\infty = \sup\{|x_i|\,,\ i = 1, ..., n\}$. Defnizione di norma ℓ^1 su $\mathbb{R}^n$: $||x||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$. Norma euclidea (o norma ℓ^2) su $\mathbb{R}^n$: $\|x\|_e \equiv \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$.

In generale, se lo spazio vettoriale V è uno spazio euclideo, ossia è dotato di un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, la norma euclidea è data da $||v|| = \langle v, v\rangle^{1/2}$, per $v \in V$.

Distanza indotta da una norma: una norma $|| \cdot ||$ su uno spazio vettoriale V induce una distanza d su V definita da $d(v_1, v_2) = ||v_1 - v_2||$ per $v_1, v_2 \in V$.

La convergenza di successioni rispetto alla norma ℓ^1 (risp. ℓ^2) opportunamente riscalata, viene definita convergenza in media (risp. in media quadratica), mentre la convergenza rispetto alla norma ℓ^∞ dviene definita convergenza uniforme.

Definizione di successione di Cauchy in uno spazio metrico. Una successione convergente è di Cauchy. Spazi metrici completi: sono quelli in cui tutte le successioni di Cauchy convergono. Esempi: $\mathbb{R}$ ed $\mathbb{R}^n$, con le norme $\ell^1, \ell^2, \ell^\infty$ (o una qualunque norma).

Norme sullo spazio vettoriale $C^0([a, b]; \mathbb{R})$ delle funzioni $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sull'intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$: ricordiamo che per $f_1, f_2 \in C^0([a, b])$, la funzione $f_1 + f_2$ è definita da $x \mapsto f_1(x) + f_2(x)$, la funzione $\lambda \cdot f$ è definita da $x \mapsto \lambda \cdot f(x)$, e l'elemento neutro (zero) rispetto alla somma è la funzione identicamente nulla $x \mapsto 0$ per ogni $x \in [a, b]$.

Osservazione: $C^0([a, b]; \mathbb{R})$ (e in genere gli spazi di funzioni che si considerano in analisi) è uno spazio vettoriale infinito dimensionale, ovvero contiene infiniti elementi linearmente dipendenti: infatti per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'insieme delle funzioni monomiali $E_n = \{1, x, ..., x^n\} \subset C^0([a, b]; \mathbb{R})$ è linearmente indipendente, in quanto una combinazione lineare di elementi di E_n è un polinomio di grado al più n, che per il Teorema fondamentale dell'Algebra si annulla solo in un numero finito di punti (inferiore o uguale ad n), e non può pertanto coincidere con la funzione identicamente nulla su $[a, b]$ a meno che tutti i coefficienti siano nulli.

Lo spazio $C^0([a, b]; \mathbb{R})$ può essere dotato della norma ℓ^∞ (detta norma della convergenza uniforme) definita da $||f||_{\ell^\infty} \equiv \|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|\,,\ t \in [a, b]\}$. Posto $M = \|f\|_\infty$, il grafico di f risulta confinato nel rettangolo $[a, b] \times [-M, M]$. Si può definire su $C^0([a, b]; \mathbb{R})$ anche la norma ℓ^1 (detta norma della convergenza in media) ponendo $||f||_{\ell^1} \equiv \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt$. Definizione di norma ℓ^2 su $C^0([a, b]; \mathbb{R})$:

$$||f||_{\ell^2} \equiv \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}.$$

Si tratta di una norma euclidea, indotta dal prodotto scalare $\langle f, g\rangle_{\ell^2} = \int_a^b f(t)g(t)dt$, definito per $f, g \in C^0([a, b]; \mathbb{R})$. Questa norma (detta della convergenza in media quadratica) è spesso usata in problemi di minima distanza (cfr. *metodo dei minimi quadrati*).

Defininzione di convergenza puntuale: una successione di funzioni $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ converge puntualmente ad $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se $\forall\, x \in I$, $\lim_n |f_n(x) - f(x)| = 0$.

Definizione di convergenza uniforme: date $f, f_n : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice che le f_n convergono uniformemente ad f in E se

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \equiv \lim_{n\to+\infty} ||f_n - f||_{\ell^\infty(E)} = 0\,.$$

La convergenza uniforme implica quella puntuale, mentre il viceversa non è vero in generale: si prenda ad esempio $E = [0, 1]$, $f_n(x) = n{\cdot}x$ per $0 \le x \le 1/n$, $f_n(x) = 2{-}n{\cdot}x$ per $1/n \le x \le 2/n$, e $f_n(x) = 0$ per $2/n \le x \le 1$. Si ha $f_n(x) \to 0$ per ogni $x \in d$, ma $||f_n||_\infty = 1\ \forall\, n$, per cui non vi può essere convergenza uniforme alla funzione identicamente nulla.

Proprietà notevoli della convergenza uniforme: siano $f_n, f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $||f_n - f||_{\ell^\infty(E)} \to 0$ per $n \to +\infty$. Si ha che:

1) se le f_n sono continue, allora f è continua.

2) se $E = [a, b]$, $\lim_n \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim_n f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$ (passaggio al limite sotto il segno di integrale).

3) se $f_n \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$ (ossia $f_n, f_n' \in C^0([a, b]; \mathbb{R})$) e $f_n \to f$, $f_n' \to g$ uniformemente in $[a, b]$, allora $g = f'$ su $[a, b]$ (passaggio al limite sotto il segno di derivata).

Nel caso particolare delle serie di funzioni, cioè quando $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x)$, con $u_k : [a, b] \to \mathbb{R}$, le proprietà della convergenza uniforme si traducono come segue: date $u_k \in C^0([a, b]; \mathbb{R})$, se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ converge uniformemente in $[a, b]$, allora converge ad una funzione continua. Inoltre, vale

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b u_k(t)dt \qquad \text{(integrazione per serie).}$$

Se inoltre $u_k \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$ e $\sum_{k=0}^{\infty} u_k'(x)$ converge uniformemente in $[a, b]$ allora

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} u_k'(x) \qquad \text{(derivazione per serie).}$$

Applicazione di 2) : dato che per una serie di potenze vale il teorema di integrazione per serie, si può calcolare ad esempio

$$\int_a^b e^{-x^2} dx = \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k} \right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (b^{2k+1} - a^{2k+1})}{(2k+1)k!}\,.$$

Alcuni semplici esempi mostrano come la convergenza puntuale non sia sufficiente in generale, a garantire la validità dei passaggi al limite 1) 2) e 3).

Dimostrazione dei punti 1) 2) 3) di cui sopra: si ha

$$\left| \int_a^b f(t)dt - \int_a^b f_n(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t) - f_n(t)|\, dt \leq (b-a) \cdot ||f - f_n||_{\ell^\infty([a,b])} \to 0,$$

da cui discende 2).

3) Si ha $f_n(x) - f_n(a) = \int_a^x f_n'(t)dt$, ed il primo membro converge a $f(x) - f(a)$ perchè le f_n in particolare convergono puntualmente, mentre il secondo membro converge a $\int_a^b g(t)dt$ per la convergenza uniforme di f_n' su $[a,b]$ ed il passaggio al limite sotto il segno di integrale. Per il Teorema fondamentale del calcolo ne consegue $f' = g$.

1) Per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N > 0$ tal che per ogni $n > N$, $||f_n - f||_\infty < \epsilon$. Sia $x_0 \in [a,b]$ e fissato $n > N$, sia $\delta > 0$ tale che $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \epsilon$ per $|x - x_0| < \delta$ (tale δ esiste per la continuità di f_n). Allora, per ogni $x \in [a,b]$, $|x - x_0| < \delta$, si ha, per la diseguaglianza triangolare,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq 3\epsilon\,,$$

ovvero f è continua in x_0, per ogni fissato $x_0 \in [a,b]$.

Teorema: $C^0([a,b];\mathbb{R})$ dotato della norma $|| \cdot ||_\infty$ è completo. Dimostrazione: data una successione di Cauchy $\{f_n\} \subset C^0([a,b];\mathbb{R})$, per ogni $\epsilon > 0$ $\exists$ n_0 tale che $\forall\, n, m > n_0$ $||f_n - f_m||_\infty < \epsilon$. In particolare, per ogni $a \leq x \leq b$ si ha $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$, dunque $\{f_n(x)\}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$ $\forall$ $a \leq x \leq b$, ed è dunque convergente per la completezza di $\mathbb{R}$. Detto $f(x) = \lim_m f_m(x)$, si ha $|f_n(x) - f(x)| = \lim_m |f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon\ \forall\, n > n_0$, $\forall$ $a \leq x \leq b$. Passando al sup su $x \in [a,b]$ si ottiene $||f_n - f||_\infty \leq \epsilon\ \forall\, n > n_0$, ovvero $||f_n - f||_\infty \to 0$ per $n \to +\infty$.

Inoltre, $f \in C^0([a,b])$ poichè il limite uniforme f delle funzioni continue f_n è una funzione continua. Pertanto la successione $\{f_n\}$ converge in $C^0([a,b];\mathbb{R})$ rispetto alla norma $\| \cdot \|_\infty$. $\square$

Bibliografia

[A] Adams & Essex, Calcolo differenziale 2, Ambrosiana

[D] Davidson & Donsig, Real Analysis and applications, Prentice Hall