FOGLIO 1

Da consegnare Giovedi 11 ottobre all'inizio della lezione.

Esercizio 1 (Punti 1+1+1)**.** Si decida (motivando la risposta) se i seguenti enunciati su un numero $a \in \mathbb{N}$ sono veri o falsi:

(1) Se $a^3 > a^2$ allora $a > 1$;
(2) Se 3 divide a, allora a è multiplo di 5;
(3) a è dispari se e solo se a^2 è dispari.

Esercizio 2 (Punti 4)**.** Si dimostri per induzione che $\sum_{i=0}^{n}(2i)^3 = 2n^2(n+1)^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 3 (Punti 4)**.** Si dimostri per induzione che $4^n \geq 1 + 3n$ per ogni intero $n \geq 1$.

Esercizio 4 (Punti 4)**.** Trovare l'errore nella seguente "dimostrazione" per induzione:

Dimostrazione. Dimostriamo per induzione che tutti i punti del piano sono allineati, cioè dati n punti del piano, $(n \geq 1)$, esiste una retta che li contiene.
Passo Base $(n = 1)$: Dato un punto P_1, esiste sempre una retta che passa per P_1;
Passo induttivo: Si considerino $n+1$ punti del piano $P_1, \ldots, P_n, P_{n+1}$. Per ipotesi induttiva esiste una retta r passante per $P_1, \ldots, P_n$ e una retta s passante per $P_2, \ldots P_n, P_{n+1}$. Consideriamo l'intersezione $r \cap s = \{P_2, \ldots, P_n\}$. Ricordiamo che date due rette nel piano, esse o sono parallele, o hanno un punto in comune, o sono coincidenti. Nel nostro caso r e s hanno almeno due punti in comune (P_2 e P_n) e quindi concludiamo che r e s coincidono. Pertanto $P_1 \in s$ e quindi $P_1, \ldots, P_n, P_{n+1}$ sono allineati $\square$

Esercizio 5 (Punti 2+2+2)**.** (1) Si scriva $\frac{2+i}{1-2\,i}$ in forma algebrica.
(2) Si scriva $\frac{1-i}{3}$ in forma trigonometrica.
(3) Si calcoli $(\frac{1-i}{3})^6$.

Esercizio 6 (Punti 5)**.** Si disegnino nel piano cartesiano i punti z_1, z_2, z_3 corrispondenti alle soluzioni dell'equazione

$$z^3 - 8i = 0.$$

e calcolare l'area della figura di vertici z_1, z_2, z_3.

Esercizio 7 (Punti 4)**.** ☻ Dimostrare che l'insieme dei numeri primi è infinito.

N.B.
Il simbolo ☻ denota esercizi giudicati **difficile**.

Date: 4 ottobre 2012.