

EX 1 file A Analisi Matematica I

i) Calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} (6^x + 1)^{\frac{1}{x}}$ usando la regola di de l'Hôpital

dopo averne verificate le condizioni

ii) Enumera il teorema di de l'Hôpital relativo al punto i).

$$f, g: (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

f, g derivabili in $(a, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$g'(x) \neq 0 \text{ in } (a, +\infty)$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \quad (l \in \mathbb{R} \cup \{\infty\})$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

$(6^x + 1)^{\frac{1}{x}}$ è definita e continua in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \Rightarrow$ mi restringo a $(0, +\infty)$
Dovendo studiare il limite per $x \rightarrow +\infty$

$$(6^x + 1)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln(6^x + 1)}$$

per la continuità della funzione esponenziale risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (6^x + 1)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(6^x + 1)}{x}}$$

Studiamo $\frac{\ln(6^x + 1)}{x}$

$$\text{Sia } f(x) = \ln(6^x + 1) \quad g(x) = x$$

f, g sono continue e derivabili in $(0, +\infty)$

$$g'(x) = 1 \neq 0 \text{ in } (0, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{6^x + 1} \cdot (6^x \ln 6)}{1} = \frac{6^x \ln 6}{6^x + 1} = \frac{6^x \ln 6}{6^x (1 + \frac{1}{6^x})} = \frac{\ln 6}{1 + \frac{1}{6^x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ln 6$$

sono verificate le hp del Teorema di de l'Hospital $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ln 6$$

$$\text{Quindi } \lim_{x \rightarrow +\infty} (6^x + 1)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln 6} = 6.$$