EX 1 fila B Analisi Matematica II

i) Sia $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^2 \operatorname{atn}^3\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ y^2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

Studiare la continuità di f in (0,0), giustificando ogni risposta

ii) definire la continuità di un campo scalare in un punto.

Ris

ii) Sia $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e sia $\underline{x}_0 \in A$

se $\underline{x}_0$ è un punto isolato di A $\Rightarrow$ f è continua in x_0

se $\underline{x}_0$ è di accumulazione per A $\Rightarrow$ f è continua in x_0 se

$\exists \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0)$

i) f è definita in $\mathbb{R}^2$, f è continua in $A \setminus \{x=0\}$ perché composta di funzioni continue.

(0,0) è di accumulazione per A

Calcolo f sull'asse y $\quad f|_{x=0}(x,y) = 0 \Rightarrow$ il limite, se $\exists$, vale 0.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l \iff \lim_{\rho \to 0} \sup_{\vartheta \in [0,2\pi)} |f(x_0+\rho\cos\vartheta, y_0+\rho\sin\vartheta) - l| = 0$$

Passo in coordinate polari di centro (0,0)

$$|f(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta)| = \left|(\rho^2)^2 \left(\operatorname{atn}\left(\frac{\rho\sin\vartheta}{\rho\cos\vartheta}\right)\right)^3\right| = \rho^4 \left|\left(\operatorname{atn}(\operatorname{tg}\vartheta)\right)^3\right| =$$

$$= \rho^4 |\vartheta|^3 \leq (2\pi)^3 \rho^4$$

$$\sup_{[0,2\pi]} |f(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta) - 0| = \max_{\vartheta \in [0,2\pi]} |f(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta)| = (2\pi)^3 \rho^4$$

$$\lim_{\rho \to 0} \sup_{\vartheta \in [0,2\pi]} |f(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta) - 0| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

$\Rightarrow$ f è continua in (0,0).