

Logica (m) (6)

Docente: Giuseppe Spolaore

A.A. 2010/2011

1 Introduzione

Uno degli obiettivi centrali della logica è, intuitivamente, lo studio degli **argomenti** (argomentazioni, inferenze) e la definizione di una nozione adeguata di “bontà” argomentativa. A titolo preliminare, si può dire che un argomento è più o meno “buono” secondo il supporto che la conclusione riceve dalle premesse. Così, ad esempio, dei seguenti argomenti solo (1) e (3) sono “buoni”:

- (1) *Premessa:* Piove e fa freddo.
Conclusione: Fa freddo.
- (2) *Premessa:* O piove o non piove.
Conclusione: Piove.
- (3) *Premessa 1:* Il paziente non è migliorato con gli antibiotici.
Premessa 2: Se la malattia è batterica, il paziente migliora con gli antibiotici.
Conclusione: La malattia non è batterica.
- (4) *Premessa 1:* Roma è in Italia.
Premessa 2: Verona è in Italia.
Conclusione: Berlino è in Germania.

In effetti, (2) e (4) sono *pessimi* argomenti (qualcuno negherebbe che siano argomenti *tout court*). Infatti, le loro premesse non ci autorizzano in alcun modo ad asserire la conclusione, non ci danno nessuna ragione di credere che essa sia vera. D'altra parte, (1) e (3) sono non solo buoni ma *ottimi*, perché le premesse, se vere, ci offrono una ragione definitiva e incontestabile per credere nella conclusione.

Il principale scopo del corso è presentare due modi distinti di definire la “bontà” argomentativa per una classe importante di argomenti, e mostrare che questi due modi sono – in un senso che può essere specificato rigorosamente – *equivalenti*. Il primo modo è di natura sintattica e consiste nel formulare alcune regole che ci permettono di *derivare* certe sequenze di simboli a partire da altre. Intuitivamente, queste regole di derivazione corrispondono a mosse “corrette” che possiamo eseguire nel corso di un’inferenza. Il secondo fa invece appello a nozioni semantiche, in particolare quella di (valore di) verità. Un argomento è “buono” in questo secondo senso quando è impossibile che tutte le sue premesse siano vere e la conclusione falsa.

“Buoni” e “cattivi”
argomenti

Due modi di
definire la “bontà”
argomentativa

Sezione 1

Linguaggi e calcoli formali

1 Espressioni e termini per espressioni

In logica un linguaggio è concepito, intuitivamente, come un'entità i cui mattoni sono **espressioni**. Per i nostri scopi, un'espressione può essere considerata un'entità astratta e va comunque tenuta distinta dalle sue *iscrizioni*, ossia dai segni e dalle sequenze di segni sulla carta, sulla lavagna ecc. che ci può capitare di incontrare.¹

*Espressioni,
simboli e formule*

Ai fini dello studio di linguaggi formali, le espressioni di un linguaggio si possono distinguere in simboli e formule, dove i **simboli** sono (trattati come) le unità minime di un linguaggio e le **formule** sono sequenze di simboli (in effetti, anche la sequenza di un solo simbolo può essere una formula).

Per parlare delle espressioni di un linguaggio si usano, tra le altre cose, espressioni che designano espressioni, ossia termini per espressioni o **termini metalinguistici**.

*Termini
metalinguistici*

Il modo più semplice e sistematico per costruire un termine che designa un'espressione è **menzionare** quest'ultima. Per segnalare che un'espressione è menzionata, la si può scrivere su una riga a sé, così:

Menzione

=

oppure la si può porre tra virgolette ('=')².

Naturalmente, si possono menzionare anche sequenze di simboli; ad es.

'1' '+' '2' [o, più semplicemente, '1 + 2']

designa la sequenza dei simboli '1', '+' e '2', in quest'ordine.

Rispetto ad altri sistemi di menzione, le virgolette hanno un notevole vantag-

Virgolette

¹Naturalmente, l'identificazione di espressioni con entità astratte è filosoficamente controversa, almeno quanto lo è la stessa esistenza di entità astratte. Queste perplessità di natura metafisica non sono tuttavia di immediato interesse per noi e saranno ignorate. D'ora in poi, inoltre, non ci occuperemo di iscrizioni e di altre entità della nostra esperienza quotidiana, che sono qui citate solo per completezza.

²Accade anche che le espressioni menzionate siano poste in corsivo o in grassetto, ma qui non useremo in modo sistematico queste convenzioni alternative; piuttosto, corsivo e grassetto sono, e saranno, impiegati per segnalare l'introduzione di termini tecnici (e talvolta, ma non sempre, per segnalare che essi sono menzionati) o per dare enfasi a nozioni di particolare importanza.

gio: si possono iterare, ottenendo termini che designano termini per espressioni, termini che designano termini che designano termini per espressioni ecc. Così ad es. ‘=’ è il simbolo dell’identità, “=” è un termine che designa il simbolo dell’identità e ““=”” è un termine che designa un termine che designa il simbolo dell’identità. Inoltre, le virgolette si possono combinare con altri sistemi di menzione; ad es.

‘=’

è un termine che designa ‘=’, al pari di “=” . Le virgolette però limitano la leggibilità del testo ed è dunque preferibile utilizzarle solo se possono sorgere dubbi interpretativi. Già dal terzo paragrafo, in effetti, esse saranno di regola omesse se il contesto rende chiaro che una certa espressione è menzionata.

La designazione di espressioni non richiede sempre la menzione. Se diciamo che il simbolo dell’identità è composto da due barre orizzontali stiamo usando un’espressione che designa ‘=’ (ossia ‘il simbolo dell’identità’) senza per questo menzionare quel simbolo. Inoltre, possiamo introdurre esplicitamente nomi per espressioni; ad es. possiamo stipulare che ‘Ludovico’ designi il simbolo dell’identità e che ‘Rino’ designi la formula ‘ $1 = 1$ ’. Date queste stipulazioni, possiamo dire che Ludovico è composto da due barre orizzontali e che Rino è una verità dell’aritmetica. Secondo una convenzione diffusa, inoltre, un termine del tipo ‘(.)’ affiancato a un’espressione scritta su una riga a sé conta come un nome di quell’espressione. Ad es. scrivendo

Designazione di espressioni senza menzione

(₁) è utile

si è introdotto il nome ‘(₁)’ per l’espressione ‘è utile’.

Un’espressione può comparire più di una volta all’interno di una formula. In questo caso, si dice che l’espressione ha diverse **occorrenze** in quella formula. Ad es. in ‘ $1 = 1$ ’ compaiono due simboli (‘1’ e ‘=’), una sola occorrenza di ‘=’ e due occorrenze di ‘1’. Per rendere più esplicita la distinzione tra espressioni e loro occorrenze, si usa talvolta contrapporre **espressioni** (simboli o formule) **tipo** e le loro occorrenze o **espressioni occorrenza**. In questo modo possiamo dire ad es. che in ‘ $1 = 1$ ’ compaiono due simboli tipo e tre simboli occorrenza.

Espressioni tipo ed espressioni occorrenza

Esercizi

Esercizio 1.1: ‘Lavorare ‘è’ utile’ è una frase grammaticale?

Esercizio 1.2: Sia ‘Marzio’ un nome di ‘La neve è bianca’. ‘Marzio’ è vero?

Esercizio 1.3: Sia ‘(a)’ un nome di ‘Giorgione’. Quale delle seguenti frasi è vera?

(a) è un nome.

“Giorgione” è un nome di ‘Giorgione’.

Il vero nome di ‘Giorgione’ era ‘Giorgio Barbarelli’.

(a) è un nome di Giorgione.

Giorgione era detto così per via della sua stazza.

2 Cenni sulle classi e sulle variabili

Le **classi** (o **insiemi**) sono entità astratte che possono avere come elemento o membro delle entità; ad es. $\{\text{Monte Bianco, Giuseppe Garibaldi, } 6\}$ è la classe che ha come elemento il Monte Bianco, Giuseppe Garibaldi e il numero 6. *Classi*

Non esistono due classi che abbiano gli stessi elementi (se “due” classi hanno gli stessi elementi allora sono la stessa classe); ad es. la classe $\{2 + 4, \text{Il Monte più alto d'Europa, } 6, \text{l'Eroe Dei Due Mondi, } 7 - 1\}$ è null'altro che, di nuovo, $\{\text{Monte Bianco, Giuseppe Garibaldi, } 6\}$. *L'identità delle classi*

È naturale e comodo pensare alle classi come a collezioni di entità, ma l'analogia non è perfetta; ad es. le collezioni contengono sempre diverse cose mentre vi sono classi, i *singoletti*, che hanno un solo elemento e vi è una (e una sola) classe, *l'insieme vuoto* $\emptyset$, che non ne ha nessuno. *Collezioni e classi*

Possiamo specificare una classe non solo elencando i suoi elementi ma anche indicando una condizione soddisfatta da tutti e solo i suoi elementi; ad es. $\{x : x \text{ è una caravella di Colombo}\}$ è la classe che ha come soli membri tutte le caravelle di Colombo e, stando almeno a quanto comunemente si crede, $\{x : x \text{ è una caravella di Colombo}\}$ e $\{\text{Niña, Pinta, Santa Maria}\}$ (ma anche $\{\text{Santa Maria, Pinta, Niña}\}$, $\{x : x \text{ è identico o alla Niña, o alla Pinta, o alla Santa Maria}\}$ ecc.) sono la stessa cosa. *Specificare una classe*

I termini del tipo ‘ $\{ \dots \}$ ’ che abbiamo usato fin qui (es. ‘ $\{x : x \text{ è una caravella di Colombo}\}$ ’) hanno la funzione di designare classi, e vi possono comparire espressioni un po’ particolari, le **variabili** (come variabili si impiegano di norma le lettere ‘ x ’, ‘ y ’, ‘ z ’, ‘ x_1 ’, ‘ x_2 ’, ...). A titolo del tutto preliminare il ruolo delle variabili può essere compreso considerando alcuni loro usi molto comuni nell’aritmetica elementare (che qui è data per nota). Ad es. in *Variabili*

(1) Se x è un numero naturale minore di 2 allora o $x = 0$ o $x = 1$.

l’espressione ‘ x ’ non designa nessuna entità (numero) in particolare. Semplicemente, (1) si usa per dire la stessa cosa che si potrebbe esprimere affermando

Tutti i numeri naturali minori di due sono o identici a zero o identici a uno.

Similmente, nell’espressione

(2) $\{x : x \text{ è un numero naturale minore di } 2\}$

‘ x ’ non designa nessuna entità in particolare; piuttosto (2) si usa per indicare la stessa entità che si potrebbe indicare con ‘la classe di tutte e solo le entità che sono numeri naturali minori di due’, ossia $\{0, 1\}$.

Se è chiaro che si sta parlando di numeri naturali e non, diciamo, di criceti o di numeri reali, la precisazione ‘un numero naturale’ in (1)-(2) è superflua e dovrebbe poter essere omessa. A questo fine si possono introdurre delle variabili *ad hoc* che si usano *solo* per parlare di numeri naturali, ad es. ‘ n ’, ‘ m ’, ‘ n_1 ’, ‘ n_2 ’ ecc. Così, al posto di (1)-(2) si può scrivere semplicemente

Se n è minore di 2 allora o $n = 0$ o $n = 1$.

$\{n : n \text{ è minore di } 2\}$

Per ragioni analoghe, è utile disporre di variabili *ad hoc* che si usano per parlare solo di espressioni linguistiche. Queste variabili sono talvolta chiamate *variabili metalinguistiche* (o *metalogiche*) oppure, più semplicemente, **metavariabili**. La scelta delle espressioni da impiegare come metavariabili è, entro certi limiti, arbitraria. Qui useremo le lettere ‘A’, ‘B’, ‘C’, ‘A₁’, ‘A₂’ ecc.

Metavariabili

Esercizio 2.1: Le seguenti affermazioni d’identità tra classi sono vere o false?

2.1.1 $\{\text{New York, Nuova York, Nuova Iorca}\} = \{\text{New York}\}$

2.1.2 $\{1 + 2\} = \{3\}$

2.1.3 $\{x : x = \text{Platone o } x = \text{Aristotele}\} = \{x : x = \text{Platone o } x = \text{Teofrasto}\}$

Esercizio 2.2: Scrivere affermazioni equivalenti alle seguenti utilizzando variabili (metavariabili se opportuno):

2.2.1 Tutti gli uomini sono mortali

2.2.2 Tutte le espressioni monosillabiche sono tronche

2.2.3 Tutte le espressioni che appartengono all’italiano e sono diverse da ‘precipitevolissimevolmente’ hanno meno di 26 lettere.

3 Linguaggi e linguaggi formali

Le **formule ben formate** (ffbf; singolare fbf) sono in logica il corrispettivo delle frasi grammaticali di una lingua naturale (ad es. ‘Il gatto è sul tavolo’) mentre le formule che non sono ben formate sono il corrispettivo delle frasi non grammaticali (ad es. ‘Gatto tavolo il sul è’).

Ffbf

In quanto segue i **linguaggi** saranno trattati come entità interamente determinate date le loro ffbf: non vi sono due linguaggi distinti che hanno esattamente le stesse ffbf (se “due” linguaggi hanno le stesse ffbf allora sono lo stesso linguaggio). Di conseguenza, per definire un linguaggio è sufficiente individuare tutte le formule (ossia le sequenze di simboli) che sono ffbf di quel linguaggio. D’altra parte, individuare una formula è null’altro che specificare quali simboli vi occorrono, e in che ordine. Così, un linguaggio L può essere definito specificando tutti i simboli che occorrono in almeno una formula di L, ossia il **vocabolario** di L, e specificando in che ordine uno o più di quei simboli occorrono in ciascuna ffbf di L. Consideriamo ad es. un linguaggio (molto povero) L₁ il cui vocabolario include solo i due simboli ‘□’ e ‘Δ’ e le cui ffbf sono tutte e solo le sequenze di esattamente due occorrenze di simboli (tipo) distinti. Il primo passo di una definizione di L₁ è l’enunciazione del suo vocabolario, ossia

L’identità dei linguaggi

Definire un linguaggio

Vocabolario di L₁: ‘□’, ‘Δ’.

Il secondo passo è specificare in che ordine i simboli del vocabolario ricorrono in ciascuna ffbf di L₁. Di fatto, vi sono diversi modi per raggiungere questo risultato. Consideriamo ora tre possibili definizioni alternative, accompagnate da qualche parola di commento.

Def. 1. A è una fbf di L₁ se e solo se $A = \square\Delta$ o $A = \Delta\square$.

Def. 1 stabilisce per definizione una condizione che *tutte e solo* le fbf di L_1 soddisfano. Intuitivamente, mediante Def. 1 si stipula che essere una fbf di L_1 è né più né meno che essere o una sequenza composta, nell'ordine, da ' $\square$ ' e ' Δ ' oppure una sequenza composta, nell'ordine, da ' Δ ' e ' $\square$ '. È facile osservare che Def. 1 è perfettamente equivalente a:

Def. 2.

(2-a) Se $A = \square \Delta$ o $A = \Delta \square$ allora A è una fbf di L_1 ;

(2-b) Nient'altro è una fbf di L_1 .

Qui la clausola (2-a) stabilisce per definizione una condizione che alcune fbf di L_1 soddisfano, e la clausola (2-b) stabilisce che *solo* le espressioni che soddisfano la condizione enunciata in (2-a) sono fbf di L_1 . Def. 2 è un esempio dello stile di definizione che impiegheremo di regola. I vantaggi di Def. 2 rispetto a Def. 1 non sono evidenti in questo caso, ma lo diventeranno non appena considereremo linguaggi leggermente più complessi di L_1 . In contesti di discussione informale, si possono adottare definizioni in cui il ricorso a variabili o altri tecnicismi è ridotto al minimo. Una versione "intuitiva" di (2) è ad es.

Def. 3.

(3-a) ' $\square \Delta$ ' e ' $\Delta \square$ ' sono fbf di L_1 ;

(3-b) Nient'altro è una fbf di L_1 .

Un **linguaggio formale** è un linguaggio che, come L_1 , può essere definito senza alcun riferimento, diretto o indiretto, all'interpretazione e alla valutazione delle sue formule ben formate. In altri termini, le fbf di un linguaggio formale devono poter essere specificate senza parlare delle entità che (eventualmente) designano, della loro verità/falsità, delle (eventuali) circostanze in cui sono vere/false ecc.

Linguaggi formali

In molti casi, le espressioni che si usano per parlare dei simboli o delle formule di un linguaggio non rientrano tra le espressioni di quel linguaggio. Non necessariamente, dunque, un linguaggio coincide con il linguaggio che si usa per parlare di quel linguaggio. D'ora in poi, in effetti, distingueremo tra il linguaggio che di volta in volta costituirà il nostro oggetto di studio, ossia il **linguaggio oggetto**, e il linguaggio che useremo per parlare di quel linguaggio oggetto, ossia il **metalinguaggio**. In particolare, il nostro metalinguaggio sarà l'italiano arricchito di espressioni ausiliarie che ci permettono di parlare in modo efficiente del linguaggio oggetto (termini metalinguistici, termini tecnici come 'occorrenza', 'classe', 'formula ben formata', simboli come ' $\{\dots\}$ ', ' $=$ ' ecc.).

Linguaggio oggetto e metalinguaggio

Un esempio può essere utile per comprendere meglio la distinzione tra linguaggio oggetto e metalinguaggio. La seguente

(1) $\square \Delta$

è un'espressione (una fbf) del linguaggio oggetto L_1 . Poiché fin qui non abbiamo mai parlato di come le fbf di L_1 debbano essere interpretate, allo stato attuale non ha semplicemente nessun senso chiedersi che cosa (1) significhi, o se sia vera o falsa. Invece

Se A è una fbf di L_1 diversa da ' $\square \Delta$ ' allora $A = \Delta \square$.

Tutte le fbf di L_1 diverse da $\square \Delta$ sono identiche a $\Delta \square$.

sono due frasi (tra loro equivalenti) del metalinguaggio e sono entrambe evidentemente dotate di significato nonché vere.

Esercizio 3.1: Si consideri il linguaggio L_1 definito appena sopra e si risponda alle seguenti domande:

3.1.1 Sia 'Gigi' il nome della fbf $\square \Delta$. Gigi è una fbf di L_1 ?

3.1.2 'Gigi' è una fbf di L_1 ?

3.1.3 $A \Delta \square \Delta \square$ è una fbf di L_1 ?

Esercizio 3.2: Sia L'' un linguaggio definito come segue:

Vocabolario di L'' : Lo *Zingarelli*, edizione 2009.

Regole di formazione di L'' :

- (a) Ogni sequenza di simboli del vocabolario di L'' che è una frase vera in italiano è una fbf di L'' .
- (b) Nient'altro è una fbf di L'' .

3.2.1 'La neve è bianca' è una fbf di L'' ?

3.2.2 L'' è un linguaggio formale?

Esercizio 3.3: Sia L''' un linguaggio definito come segue:

Vocabolario di L''' : '1', '='.

Regole di formazione di L''' :

- (a) Ogni sequenza di tre occorrenze di simboli del vocabolario di L''' che è una verità dell'aritmetica è una fbf di L''' .
- (b) Nient'altro è una fbf di L''' .

3.3.1 Quante e quali sono le fbf di L''' ?

3.3.2 L''' è un linguaggio formale?

4 Linguaggi formali e definizioni induttive

Il linguaggio L_1 definito al paragrafo precedente ha una caratteristica interessante che lo distingue da molti altri linguaggi: ha poche fbf (due, in effetti). Dunque, per definire L_1 è sufficiente elencare le sue fbf. Questo non è umanamente possibile per linguaggi che comprendono *molte* fbf, ad es. per il linguaggio L_2 , definito in modo “intuitivo” come segue:

Def. 4.

Vocabolario di L_2 : ‘ $\square$ ’, ‘ Δ ’.

Regole di formazione di L_2 :

- (a) Ogni sequenza di simboli del vocabolario di L_2 che inizi e finisca con un’occorrenza di ‘ $\square$ ’ e in cui non compaiano due occorrenze contigue del medesimo simbolo è una fbf di L_2 .
- (b) Nient’altro è una fbf di L_2 .

È facile osservare che L_2 è molto più ricco di L_1 . In particolare, L_2 ha un numero indefinitamente grande di fbf.

La definizione di L_2 è comprensibile, ma piuttosto complicata. Fortunatamente, vi è uno stile di definizioni molto più compatto e almeno altrettanto rigoroso. Iniziamo da un esempio. Sia L_3 un linguaggio definito come segue (d’ora in poi le virgolette saranno omesse se non indispensabili):

Def. 5.

Vocabolario di L_3 : $\square$, Δ .

Regole di formazione di L_3 :

- (5-a) $\square$ è una fbf di L_3 .
- (5-b) Se A è una fbf di L_3 , allora $A \Delta \square$ è una fbf di L_3 .
- (5-c) Nient’altro è una fbf di L_3 .

Questa definizione specifica rigorosamente un certo insieme di fbf e, con esso, il nostro linguaggio L_3 . La clausola (5-a) ci assicura che $\square$ è una fbf di L_3 . Data la clausola (5-b), possiamo concluderne che anche $\square \Delta \square$ è una fbf di L_3 . Dunque, per le medesime ragioni, possiamo concluderne anche che $\square \Delta \square \Delta \square$ è una fbf di L_3 , e lo stesso discorso vale per $\square \Delta \square \Delta \square \Delta \square$, per $\square \Delta \square \Delta \square \Delta \square \Delta \square$ e così via per tutte le fbf che sono composte da una fbf A seguita da $\Delta \square$. La clausola (5-c) ci assicura che queste fbf sono tutte le fbf di L_3 .

Definizioni come questa sono dette **definizioni induttive**. Le definizioni induttive includono almeno due clausole dette rispettivamente **base** e **passo induttivo**. La base (qui la clausola (5-a)) specifica che certe entità godono di una certa proprietà P . Il passo induttivo (qui la clausola (5-b)) permette, data un’entità che gode della proprietà P , di specificare un’altra entità che gode della proprietà P (se ve n’è una—ma nel caso dei linguaggi formali quest’eventualità di regola si verifica). Nel nostro esempio, la base (5-a) specifica che $\square$ ha la proprietà di essere una fbf, mentre il passo induttivo (5-c), data una qualunque fbf, specifica una sequenza composta da quella fbf e da ‘ $\Delta \square$ ’, in quest’ordine, che ha la proprietà di essere una fbf.

*Definizioni
induttive*

Spesso si dice che è indispensabile evitare *circolarità* in una definizione. Poniamo ad es. di voler definire un linguaggio L' come segue:

- (1) A è una fbf di $L' =_{\text{def}} A$ occorre in una fbf di L' .

Una “definizione” come (1) si espone ad una naturale obiezione: (1) è inaccettabile (o inutile) perché presuppone che L' sia già stato indipendentemente individuato. Altrimenti non si vede come una qualunque fbf di L' possa essere specificata. In casi come questi si dice che la (presunta) definizione è *circolare*. Nello stesso spirito, si potrebbe obiettare che anche la nostra definizione di L_3 è circolare perché, nella seconda clausola, è dato per presupposto che le fbf di L_3 siano già state individuate.

In realtà, malgrado si possa essere portati a sospettare il contrario, (5) non è circolare. Infatti, la clausola (5-b) presuppone semplicemente che *almeno una* fbf di L_3 sia stata individuata, presupposizione che, grazie alla clausola (5-a), è vera. In termini forse più intuitivi, la differenza tra (1) e Def. 5 è che, mentre la prima non offre nessun indizio su come le fbf del linguaggio debbano essere “costruite” a partire da fbf che sono già state individuate, la seconda specifica una fbf e ci permette sempre, data una fbf, di “costruire” una nuova fbf. Poiché non c'è nessun limite in linea di principio al numero di applicazioni successive della clausola (5-b), Def. 5 determina un numero indefinitamente grande di fbf di L_3 (tutte le fbf di L_3 , in virtù della clausola (5-c)).

Esercizio 4.1: Si consideri il linguaggio L_2 sopra definito e si risponda alle seguenti domande:

- 4.1.1** L_2 è un linguaggio formale?
4.1.2 La sequenza di (un'occorrenza di) $\square$, Δ , $\square$, Δ , $\square$ (in quest'ordine) è una fbf di L_2 ?
4.1.3 $\square \Delta \square \square$ è una fbf di L_2 ?

Esercizio 4.2: Si consideri il linguaggio L_3 sopra definito, si sostituisca L_3 a L_2 nelle domande 4.1.1-4.1.3, e si risponda alle risultanti domande.

Esercizio 4.3: L_2 e L_3 sono lo stesso linguaggio?

Esercizio 4.4: Siamo tutti discendenti di Adamo ed Eva (o così possiamo supporre). Proseguite la seguente definizione induttiva di *discendente di* $A \& E$:

- (a) Se x è figlia/o di $A \& E$, allora è discendente di $A \& E$.

Esercizio 4.5: Se create una riproduzione di un manoscritto a (magari riscrivendolo o fotocopiandolo) create una copia di a . Ma lo stesso vale se create una riproduzione di una riproduzione di a , e anche se create una riproduzione di una riproduzione di una riproduzione di a , e così via. Definite induttivamente *copia di* a a partire da *riproduzione di* a .

Esercizio 4.6: Proseguite la seguente definizione induttiva di *numero naturale* utilizzando la nozione di *successore* (intuitivamente, il successore di 0 è l'entità che indichiamo con '1', il successore di 1 è l'entità che indichiamo con '2', ecc.):

- (a) 0 è un numero naturale.

Esercizio 4.7: Dato un qualunque numero naturale a (potete scegliere il vostro numero preferito), definite induttivamente *maggiore di a* , a partire dalla nozione di *successore*.

5 Il linguaggio della logica proposizionale

Il linguaggio della logica proposizionale può essere definito specificando il suo vocabolario e le sue regole di formazione. Ecco una possibile definizione, di fatto quella adottata dal Lemmon:

Def. 6. Il linguaggio della logica proposizionale

Vocabolario:

Le **parentesi**: ‘(’, ‘)’

Le **variabili proposizionali** o **lettere enunciative** ‘ P ’, ‘ Q ’, ‘ R ’, ‘ S ’,...

I seguenti **operatori per formare proposizioni da proposizioni** o **connettivi logici**:

‘ $\neg$ ’, detto *negazione*.

‘ $\rightarrow$ ’, detto *implicazione materiale* o *condizionale*.

‘ $\wedge$ ’, detto *congiunzione*.

‘ $\vee$ ’, detto *disgiunzione*.

‘ $\leftrightarrow$ ’, detto *bicondizionale*.

Regole di formazione:

- (a) Ogni variabile proposizionale è una fbf.
- (b) Se A è una fbf, allora $\neg A$ è una fbf.
- (c) Se A e B sono fbf, allora $(A \rightarrow B)$ è una fbf.
- (d) Se A e B sono fbf, allora $(A \wedge B)$ è una fbf.
- (e) Se A e B sono fbf, allora $(A \vee B)$ è una fbf.
- (f) Se A e B sono fbf, allora $(A \leftrightarrow B)$ è una fbf.
- (g) Nient’altro è una fbf di L_3 .

Si noti che, come al solito, le lettere ‘ A ’ e ‘ B ’ sono metavariable, e dunque espressioni del metalinguaggio, e non espressioni del linguaggio della logica proposizionale. Se volessimo aggiungere le virgolette, ad esempio, dovremmo riscrivere la clausola (c) come

Se A e B sono fbf, allora ‘($A \rightarrow B$)’ è una fbf.

dove le metavariable, a differenza delle espressioni del linguaggio oggetto, *non* sono tra virgolette. Questa clausola, al pari di (c), si può riscrivere senza usare metavariable come

- (c)’ Qualsiasi fbf seguita da ‘ $\rightarrow$ ’ seguito da qualsiasi fbf, il tutto racchiuso tra parentesi, è una fbf.

In generale, posto che una data formula sia una fbf, è sempre possibile dimostrare in un numero finito di passi che è una fbf. Per dimostrare che P è una fbf, ad esempio, è sufficiente osservare che è una variabile proposizionale, e che dunque, per la clausola (a), è una fbf. In questo modo, la nostra dimostrazione che ' P ' è una fbf diviene:

- (1) P è una fbf in virtù di (a)

Per provare che, ad es., $-(P \wedge Q)$ è una fbf è sufficiente costruirla a partire dalle entità specificate al passo induttivo (a), ossia variabili proposizionali, per successiva applicazione di regole, così:

- (1) P è una fbf in virtù di (a)
 (2) Q è una fbf in virtù di (a)
 (3) $(P \wedge Q)$ è una fbf per (d), passi 1, 2.
 (4) $-(P \wedge Q)$ è una fbf per (b), passo 3.

Qui i passi 1 e 2 dicono che P e Q sono fbf in virtù della clausola (a); il passo 3 che $(P \wedge Q)$ è una fbf in virtù di un'applicazione della clausola (d) sulle fbf introdotte ai passi 1 e 2; il passo 4 che $-(P \wedge Q)$ è una fbf in virtù dell'applicazione della clausola (b) sulla fbf introdotta al passo 3. Se si osserva la fbf al passo 4, ossia $-(P \wedge Q)$, ci si rende immediatamente conto che contiene occorrenze di diverse fbf. In particolare, possiamo contare un'occorrenza di P $[-(\overline{P} \wedge Q)]$, una di Q $[-(P \wedge \overline{Q})]$, una di $(P \wedge Q)$ $[-(\overline{P \wedge Q})]$ e, naturalmente, una di $-(P \wedge Q)$ $[\overline{-(P \wedge Q)}]$. In effetti, le fbf che occorrono a ciascuno dei passi 1-4 sono tutte e solo quelle che hanno un'occorrenza in $-(P \wedge Q)$. Queste fbf ricadono in una o l'altra di due categorie: o non contengono connettivi logici (questo è il caso di P e Q); oppure sono state 'costruite' a partire da fbf che ricorrono ai passi precedenti per introduzione di un connettivo. Nel nostro caso, $(P \wedge Q)$ è stata 'costruita' a partire da P e Q interponendovi il connettivo $\wedge$ (e ponendo il tutto tra parentesi, naturalmente) e $-(P \wedge Q)$ è stata 'costruita' a partire da $(P \wedge Q)$ preponendovi '-'. Dato l'ultimo connettivo introdotto nella 'costruzione' di una fbf, quella fbf si dice **ambito** di quel connettivo.³ Ad esempio, l'ambito di $\wedge$ in $-(P \wedge Q)$ è la fbf $(P \wedge Q)$ o, se si preferisce, $-(\overline{P \wedge Q})$. Naturalmente, l'ambito di '-' in $-(P \wedge Q)$ è l'intera formula. Più in generale:

*Ambito, connettivo
principale e
subordinazione*

Def. 7. L'ambito di (un'occorrenza di) un connettivo in una fbf A è la più piccola fbf che ha un'occorrenza in A e che contiene quel connettivo.

Nel caso in cui l'ambito di un connettivo sia più piccolo di quello di un altro e abbia un'occorrenza in quest'ultimo, il primo connettivo si dice **subordinato** al secondo. Intuitivamente, un connettivo è subordinato a un'altro se e solo se l'ambito del primo è contenuto nell'ambito del secondo (ma non viceversa). Data una fbf in cui ricorrono connettivi, si dice **connettivo principale** quello che ha l'intera fbf come ambito. Ogni fbf in cui occorrono connettivi ha uno, e un solo, connettivo principale.

³V. Lemmon, p. 53-54. Nella traduzione italiana del Lemmon si usa 'scopo' al posto di 'ambito', contrariamente all'uso consolidato. 'Scopo' è un calco dall'inglese '*scope*' che significa, appunto, ambito. L'uso di 'scopo' sarà naturalmente tollerato, ma non incoraggiato.

Esercizio 5.1: Specificare l'ambito di ciascun connettivo nelle seguenti⁴:

$$5.1.1 \quad P \wedge \neg Q \leftrightarrow P \rightarrow P \vee Q$$

$$5.1.2 \quad (P \vee Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow P \wedge Q)$$

Esercizio 5.2: Chiarire le nozioni di *subordinazione tra connettivi* e di *connettivo principale*; poi specificare il connettivo principale e le relazioni di subordinazione tra connettivi con riferimento alle seguenti fbf⁵:

$$5.2.1 \quad P \wedge \neg Q \leftrightarrow P \rightarrow P \vee Q$$

$$5.2.2 \quad (P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow P \vee Q)$$

6 Calcoli

Fin qui abbiamo parlato di proposizioni e formule. Dal punto di vista logico, tuttavia, siamo almeno altrettanto interessati alle **inferenze** o ragionamenti.

*Inferenze,
sequenze e
sequenze derivabili*

È piuttosto naturale rappresentare una inferenza o un ragionamento come una serie di **premesse** seguite da una **conclusione**. Poniamo, ad esempio, di sapere che piove e che, se piove, allora c'è brutto tempo. Possiamo ovviamente concludere che c'è brutto tempo. Questa elementare inferenza può essere rappresentata come

(1) *Premessa:* Piove.

Premessa: Se piove allora c'è brutto tempo.

Conclusione: C'è brutto tempo.

Dal punto di vista logico, possiamo pensare ai ragionamenti come a sequenze di proposizioni dalle quali, per applicazione di certe regole di natura deduttiva, è possibile derivare una conclusione. Ad esempio, nell'inferenza di cui sopra, possiamo ottenere la conclusione in virtù di una regola nota come *modus (ponendo) ponens*. Il modus ponens ci autorizza, date le premesse (dove 'A' e 'B' sono proposizioni) 'Se A allora B' e 'A', a derivare la conclusione 'B'.

Più in generale, le inferenze possono essere rappresentate come una serie o insieme di premesse (prese in qualunque ordine) seguite da una conclusione. Parleremo di **sequenze** per indicare tali entità, ossia serie di premesse seguite da una conclusione. Parleremo anche di **sequenze derivabili** o di **sequent** per indicare sequenze la cui conclusione segue, dati certi principi deduttivi rilevanti, dalle premesse (il termine 'sequent' non è tuttavia usato nel Lemmon). Per indicare la sequenza derivabile formata da una serie X di premesse e dalla conclusione A, scriveremo

(2) $X \vdash A$

In (2) il segno $\vdash$, detto talvolta 'segno di asserzione', segnala che A è derivabile (dati certi principi deduttivi rilevanti) dalle proposizioni in X. Ad es., la sequenza derivabile le cui premesse sono $P \rightarrow Q$ e P, e la cui conclusione è Q si indica così:

⁴In questo esercizio è utile esplicitare alcune delle parentesi lasciate convenzionalmente inespresse; ad es. scrivere $(P \wedge Q) \rightarrow P$ al posto di $P \wedge Q \rightarrow P$.

⁵Ad es. con riferimento a $\neg(P \wedge Q \rightarrow P \vee Q)$ è sufficiente specificare che $\neg$ è il connettivo principale, e che $\wedge$ e $\vee$ sono subordinati a $\rightarrow$.

$$P \rightarrow Q, P \vdash Q$$

Un **teorema** è una sequenza derivabile composta dalla sola conclusione. *Teoremi*
 Alternativamente, si può dire che i teoremi sono conclusioni derivabili da una serie *vuota* di premesse⁶. In simboli, per indicare che A è un teorema possiamo scrivere:

$$\vdash A$$

Come abbiamo visto, le formule di un linguaggio possono essere “buone” o “cattive”, dove quelle “buone” sono le fbf, le formule che soddisfano certe regole di buona formazione. La stessa cosa vale per le entità dette **apparati deduttivi** o **calcoli** e le sequenze. Intuitivamente, anche le sequenze possono essere “buone” o “cattive”, dove le sequenze “buone” sono quelle derivabili (i sequenti), ossia quelle che rispettano certe regole deduttive. *Calcoli*

Così come definire un linguaggio è individuare la classe delle sue fbf, allo stesso modo definire un calcolo è specificare la classe delle sue sequenze derivabili. Questo vale, naturalmente, anche per il calcolo proposizionale. Il calcolo proposizionale, come il suo linguaggio, può essere definito mediante regole, regole il cui scopo è individuare tutte e solo le sequenze derivabili del calcolo. Quanto segue sono alcune specificazioni sulle regole, e presuppone la lettura del primo capitolo del Lemmon.

7 Le regole del calcolo proposizionale

Il calcolo proposizionale ci interessa principalmente perché, al suo interno, possiamo dimostrare certe sequenze, ossia dimostrare che certe sequenze sono derivabili. Un modo ovvio per dimostrare $A_1, \dots, A_n \vdash B$ è derivare effettivamente, dalle premesse $A_1, \dots, A_n$, la conclusione B mediante applicazione delle regole del calcolo. Poniamo ad esempio di voler dimostrare $P \rightarrow Q, P \vdash Q$. Intuitivamente, inizieremo specificando le nostre premesse, ossia $P \rightarrow Q$ e P , e poi deriveremo, per applicazione di qualche regola del calcolo, Q . La regola in questione, naturalmente, sarà ancora il modus ponens. Così concepita, la nostra **prova** o **derivazione** appare così:

$$[1] \quad P \rightarrow Q, P \vdash Q$$

$P \rightarrow Q$	Premessa
P	Premessa
Q	Per applicazione del modus ponens sulle premesse

In realtà, tuttavia, le cose spesso non sono così semplici. Il motivo è che, in generale, le regole sono definite non solo su fbf ma anche sulle *assunzioni* da cui le fbf dipendono.

La prima regola presentata dal Lemmon, ossia la **regola di assunzione** (abbr. **A** o Ass.) ci autorizza a scrivere qualunque fbf a qualunque passo di una prova, *purché si specifichi che quella fbf dipende da se stessa presa come*

⁶Una serie vuota di premesse può essere identificata, come è comune in logica, con l'insieme vuoto $\emptyset$.

assunzione. La seconda regola, il **modus ponendo ponens** (MPP), permette, date due fbf A e $A \rightarrow B$ (prese in qualunque ordine) di derivare B , purché si specifichi che la conclusione dipende da tutte le assunzioni da cui dipende A e tutte le assunzioni da cui dipende $A \rightarrow B$.

Possiamo scrivere le assunzioni da cui una fbf dipende per esteso, alla sinistra della fbf. Alla destra di tutto, possiamo indicare la regola che giustifica il passo, scrivendo il nome della regola in forma abbreviata. Dunque, **[1]** può essere riscritta così:

[1*] $P \rightarrow Q, P \vdash Q$

- | | | | |
|-----|----------------------|-------------------|----------------------|
| (1) | $P \rightarrow Q$ | $P \rightarrow Q$ | A |
| (2) | P | P | A |
| (3) | $P \rightarrow Q, P$ | Q | per MPP, passi 1, 2. |

A questo punto, è piuttosto evidente che, a ciascuna riga della derivazione, ricorre un certo numero di fbf seguite da una fbf, ossia una sequenza. Poiché, come vedremo, ciascuna di quelle sequenze è derivabile, possiamo separarne le premesse e la conclusione mediante il segno di asserzione, così:

[1]** $P \rightarrow Q, P \vdash Q$

- | | | | |
|-----|----------------------|--------------------------|----------------------|
| (1) | $P \rightarrow Q$ | $\vdash P \rightarrow Q$ | A |
| (2) | P | $\vdash P$ | A |
| (3) | $P \rightarrow Q, P$ | $\vdash Q$ | per MPP, passi 1, 2. |

Le prime due sequenze sono entrambe sequenze di forma $A \vdash A$, ossia sequenze la cui unica premessa coincide con la conclusione. Più in generale, a ogni applicazione della regola di assunzione specifichiamo una sequenza di forma $A \vdash A$. Così, potremmo riformulare la regola di assunzione come segue:

Regola di assunzione Qualunque sequenza che ha come unica premessa una fbf e come conclusione quella stessa fbf è derivabile (e dunque può essere introdotta a qualunque passo di una prova).

In breve, la regola di assunzione può essere espressa semplicemente come (dove A è una fbf)

Ass.: $A \vdash A$

Intuitivamente, è difficile dubitare che una proposizione A sia, in generale, derivabile da se stessa. Ad esempio, dalla premessa che piove segue la conclusione che piove. Certo, non si tratta di una conclusione interessante. Ma nella definizione di un calcolo non è indispensabile che tutte le conclusioni siano interessanti.

La prova **[1**]** inizia con qualche applicazione della regola di assunzione (ossia con qualche sequenza di forma $A \vdash A$) e termina con la sequenza da dimostrarsi, ossia $P \rightarrow Q, P \vdash Q$. Questo vale in generale: in versione esplicita, ogni prova di una sequenza inizia con qualche sequenza $A \vdash A$ e termina con la derivazione da dimostrarsi.

Come abbiamo visto, la definizione del linguaggio del calcolo proposizionale è induttiva. Alla base induttiva si specificano delle fbf (le variabili enunciative). Le

regole al passo induttivo permettono, data una fbf, di individuare un'altra fbf. Lo stesso tipo di meccanismo è all'opera nella definizione del calcolo proposizionale. La regola di assunzione è la base induttiva della definizione: essa specifica alcune sequenze derivabili, tutte quelle la cui unica premessa coincide con la conclusione. Le altre regole permettono, data una sequenza derivabile, di individuare un'altra sequenza derivabile. Consideriamo ad esempio MPP. Come abbiamo visto, MPP ci dice che, data una fbf A con le assunzioni da cui dipende e una fbf $A \rightarrow B$ con le assunzioni da cui dipende, possiamo derivare B , che dipende da tutte le assunzioni da cui dipende A e da tutte le assunzioni da cui dipende $A \rightarrow B$. Se indichiamo con X le assunzioni da cui dipende A (prese in qualunque ordine) e con Y quelle da cui dipende $A \rightarrow B$ (prese in qualunque ordine), questa regola può essere riscritta come

Date le fbf A (con assunzioni X) e $A \rightarrow B$ (con assunzioni Y) si può derivare B (con assunzioni X, Y).

In notazione più compatta, questa regola appare così:

Modus ponendo ponens:
$$\frac{X \vdash A \quad Y \vdash A \rightarrow B}{X, Y \vdash B}$$

A questo punto, è interessante notare la stretta analogia tra il metodo che abbiamo applicato nel paragrafo precedente per dimostrare che una formula è una fbf, e il metodo che usiamo per dimostrare che una certa sequenza è derivabile. Poniamo ad esempio di voler dimostrare che P è una fbf. Nulla di più semplice: è sufficiente scrivere che P è una fbf e, se si vuole, specificare quale regola giustifica quest'affermazione (si tratta della base induttiva del linguaggio del calcolo proposizionale (a)). In altri termini, possiamo scrivere, come prima:

(1) P è una fbf in virtù di (a)

Analogamente, per dimostrare $P \vdash P$ è sufficiente scrivere $P \vdash P$ – ossia indicare che la sequenza che ha P come unica premessa e come conclusione è derivabile – e, se si vuole, menzionare la regola che autorizza questo passo, ossia la regola di assunzione. Il risultato è

[1**] $P \vdash P$

(1) $P \vdash P$ A

Torniamo ora per un istante alla definizione induttiva del nostro linguaggio, e poniamo di voler mostrare che $\neg P$ è una fbf. Tutto quello che dobbiamo fare è ‘costruire’ quella formula a partire da variabili enunciative, specificando la regola di buona formazione che ci permette di giungere al passo seguente, e i passi sui quali quella regola si applica, in questo modo (si ricordi che (b) è la regola della definizione induttiva del linguaggio che riguarda la negazione):

(1) P è una fbf in virtù di (a)
 (2) $\neg P$ è una fbf per (b), passo 1

Analogamente, per dimostrare $P \rightarrow Q, P \vdash Q$ dovremo ‘costruirla’, attraverso l'applicazione di regole del calcolo, a partire da sequenze specificate alla base induttiva del calcolo (la regola di assunzione). Ad esempio:

[1***] $P \rightarrow Q, P \vdash Q$

- | | | |
|-----|--|----------|
| (1) | $P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow Q$ | A |
| (2) | $P \vdash P$ | A |
| (3) | $P \rightarrow Q, P \vdash Q$ | 1, 2 MPP |

Se ora abbreviamo queste derivazioni, sostituendo le premesse di ciascuna sequenza con i numeri corrispondenti ai passi in cui quella premessa è stata introdotta, e scriviamo quei numeri alla sinistra del numero del passo, il risultato è una derivazione nella notazione del Lemmon, ossia

[1L] $P \rightarrow Q, P \vdash Q$

- | | | | |
|------|-----|-------------------|----------|
| 1 | (1) | $P \rightarrow Q$ | A |
| 2 | (2) | P | A |
| 1, 2 | (3) | Q | 1, 2 MPP |

Quello che segue alla prossima pagina è un riassunto delle dieci regole primitive della nostra definizione del calcolo, più la definizione del bicondizionale, specificate sia in uno stile simile a quello del Lemmon, sia nella notazione compatta, sia nella forma di uno schema di derivazioni.

Le regole del calcolo proposizionale

Le regole del calcolo proposizionale possono essere distinte in due grandi famiglie. In base alle regole della prima famiglia, la fbf derivata dipende da tutte le assunzioni che compaiono ai passi cui si applica. Ad esempio, se la regola si applica alle fbf A_1 e A_2 che dipendono dalle assunzioni B_1 e B_2 rispettivamente, la fbf derivata in accordo alla regola dipenderà da tutte le assunzioni B_1, B_2 . Queste regole sono in tutto sette: il *modus ponendo ponens*, il *modus tollendo tollens* e le regole di assunzione, doppia negazione, introduzione della congiunzione, eliminazione della congiunzione e introduzione della disgiunzione. Le regole dell'altra famiglia sono tre: le regole di eliminazione della disgiunzione, prova condizionale e *reductio ad absurdum*. Almeno alcune delle assunzioni che figurano ai passi cui una di queste regole si applica non si trasferiscono alla conclusione derivata in base alla regola. Tali assunzioni si dicono **assunzioni scaricate**.

Iniziamo esponendo le regole della prima famiglia.

Regola di Assunzione (A o Ass.) Qualunque fbf A è derivabile da se stessa presa come assunzione. In altri termini:

$$A \vdash A$$

In una prova si può sempre introdurre il passo:

$$n \quad (n) \quad A \quad \text{Ass.}$$

Qui e in seguito, le lettere 'n', 'm', 's' ecc. indicano numeri naturali.

Modus ponendo ponens (MPP) Date A e $A \rightarrow B$ (prese in qualunque ordine), si può derivare B , che dipende da tutte le assunzioni da cui dipende A e da tutte le assunzioni da cui dipende $A \rightarrow B$. In altri termini (dove le lettere $X, Y, \dots$ indicano serie di assunzioni):

$$\frac{X \vdash A \quad Y \vdash A \rightarrow B}{X, Y \vdash B}$$

In una prova, dati in qualunque punto e ordine i passi

$$\begin{array}{lll} i_1, \dots, i_k & (n) & A \quad \dots \\ j_1, \dots, j_l & (m) & A \rightarrow B \quad \dots \end{array}$$

si può scrivere

$$i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l \quad (s) \quad B \quad n, m \text{ MPP}$$

Qui e in seguito, 'i₁, ..., i_k', 'j₁, ..., j_l' ecc. indicano serie di 0 o più numeri naturali. Qui e in seguito, inoltre, l'ordine in cui le assunzioni corrispondenti a $n, m, i_1, \dots, i_k$ ecc. sono prese è irrilevante.

Modus tollendo tollens (MTT): Date $A \rightarrow B$ e $\neg B$ (in qualunque ordine), si può derivare $\neg A$, che dipende da tutte le assunzioni da cui dipende $A \rightarrow B$ e da tutte le assunzioni da cui dipende $\neg B$. In altri termini:

$$\frac{Y \vdash A \rightarrow B \quad X \vdash \neg B}{X, Y \vdash \neg A}$$

In una prova, dati in qualunque punto e ordine i passi

$$\begin{array}{lll} i_1, \dots, i_k & (n) & A \rightarrow B \quad \dots \\ j_1, \dots, j_l & (m) & \neg B \quad \dots \end{array}$$

si può scrivere

$$i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l \quad (s) \quad \neg A \quad n, m \text{ MTT}$$

Doppia negazione (DN): Da A si può derivare $\neg\neg A$, che dipende dalle stesse assunzioni da cui dipende A ; e da $\neg\neg A$ si può derivare A , che dipende dalle stesse assunzioni da cui dipende $\neg\neg A$. In altri termini

$$\frac{X \vdash A}{X \vdash \neg\neg A} \qquad \frac{X \vdash \neg\neg A}{X \vdash A}$$

In una prova, dato il passo

$$i_1, \dots, i_k \qquad (n) \quad A \qquad \dots$$

si può scrivere

$$i_1, \dots, i_k \qquad (m) \quad \neg\neg A \qquad n \text{ DN}$$

e dato il passo

$$i_1, \dots, i_k \qquad (n) \quad \neg\neg A \qquad \dots$$

si può scrivere

$$i_1, \dots, i_k \qquad (m) \quad A \qquad n \text{ DN}$$

Introduzione della congiunzione ($I\wedge$): Date A e B (in qualunque ordine), si può derivare $A \wedge B$, che dipende da tutte le assunzioni da cui dipende A e da tutte le assunzioni da cui dipende B . In altri termini:

$$\frac{X \vdash A \quad Y \vdash B}{X, Y \vdash A \wedge B}$$

In una prova, dati in qualunque punto e ordine i passi

$$i_1, \dots, i_k \qquad (n) \quad A \qquad \dots$$

$$j_1, \dots, j_l \qquad (m) \quad B \qquad \dots$$

si può scrivere

$$i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l \quad (s) \quad A \wedge B \qquad n, m \text{ } I\wedge$$

Eliminazione della congiunzione ($E\wedge$): Data $A \wedge B$ si possono derivare indifferentemente sia A sia B , che dipendono dalle stesse assunzioni da cui dipende $A \wedge B$. In altri termini:

$$\frac{X \vdash A \wedge B}{X \vdash A} \qquad \frac{X \vdash A \wedge B}{X \vdash B}$$

In una prova, dato il passo

$$i_1, \dots, i_k \qquad (n) \quad A \wedge B \qquad \dots$$

si può scrivere

$$i_1, \dots, i_k \qquad (m) \quad A \qquad n \text{ } E\wedge$$

e si può scrivere

$$i_1, \dots, i_k \qquad (s) \quad B \qquad n \text{ } E\wedge$$

Introduzione della disgiunzione (IV): Data A si possono derivare indifferentemente sia $A \vee B$ sia $B \vee A$, che dipendono dalle stesse assunzioni da cui dipende A . In altri termini:

$$\frac{X \vdash A}{X \vdash A \vee B} \qquad \frac{X \vdash A}{X \vdash B \vee A}$$

In una prova, dato il passo

$$i_1, \dots, i_k \qquad (n) \quad A \qquad \dots$$

si può scrivere

$$i_1, \dots, i_k \qquad (m) \quad A \vee B \qquad n \text{ IV}$$

e si può scrivere

$$i_1, \dots, i_k \qquad (s) \quad B \vee A \qquad n \text{ IV}$$

Quelle che seguono sono le tre regole della seconda famiglia cui si alludeva all'inizio del paragrafo. Si tratta di regole in base alle quali, intuitivamente, la conclusione *non* ‘eredita’ tutte le assunzioni da cui dipendono le premesse.

Eliminazione della disgiunzione (EV): Data $A \vee B$, e posto che una fbf C sia derivabile tanto da A (eventualmente date altre assunzioni) tanto da B (eventualmente date altre assunzioni), si può derivare C , che dipende da tutte le assunzioni di $A \vee B$, e da tutte le assunzioni impiegate nella derivazione di C da A , eccetto A , e nella derivazione di C da B , eccetto B . In altri termini:

$$\frac{X \vdash A \vee B \quad Y, A \vdash C \quad Z, B \vdash C}{X, Y, Z \vdash C}$$

In una prova, dati in qualunque punto e ordine i passi

$$i_1, \dots, i_k \qquad (n) \quad A \vee B \qquad \dots$$

$$\dots \qquad (m) \quad A \qquad \dots$$

$$\dots \qquad (o) \quad B \qquad \dots$$

e dati in qualunque punto e ordine i passi

$$j_1, \dots, j_l, m \qquad (p) \quad C \qquad \dots$$

$$u_1, \dots, u_v, o \qquad (q) \quad C \qquad \dots$$

si può scrivere

$$i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l, u_1, \dots, u_v \quad (s) \quad C \qquad n, m, o, p, q \text{ EV}$$

Prova condizionale (PC): Data una fbf B che ha A fra le sue assunzioni, si può derivare $A \rightarrow B$, che dipende da tutte le assunzioni da cui dipende B, eccetto A stessa. In altri termini:

$$\frac{X, A \vdash B}{X \vdash A \rightarrow B}$$

In una prova, dato in qualunque punto il passo

$$\dots \quad (n) \quad A \quad \dots$$

e dato in qualunque punto il passo

$$i_1, \dots, i_k, n \quad (m) \quad B \quad \dots$$

si può scrivere

$$i_1, \dots, i_k \quad (s) \quad A \rightarrow B \quad n, m \text{ PC}$$

Reductio ad absurdum (RAA) Data una fbf $A \wedge \neg A$ che ha B fra le sue assunzioni, si può derivare $\neg B$, che dipende da tutte le assunzioni da cui dipende $A \wedge \neg A$, eccetto B. In altri termini,

$$\frac{X, B \vdash A \wedge \neg A}{X \vdash \neg B}$$

In una prova, dato a qualunque punto il passo

$$\dots \quad (n) \quad B \quad \dots$$

e dato a qualunque punto il passo

$$i_1, \dots, i_k, n \quad (m) \quad A \wedge \neg A \quad \dots$$

possiamo scrivere

$$i_1, \dots, i_k \quad (s) \quad \neg B \quad n, m \text{ RAA}$$

Definizione del bicondizionale (Def. $\leftrightarrow$) Al posto di $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$, dove A e B sono fbf, si può scrivere $A \leftrightarrow B$, e viceversa. In altri termini,

$$\frac{X \vdash (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)}{X \vdash A \leftrightarrow B} \quad \frac{X \vdash A \leftrightarrow B}{X \vdash (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)}$$

In una prova, dato il passo

$$i_1, \dots, i_k \quad (n) \quad (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \quad \dots$$

si può scrivere

$$i_1, \dots, i_k \quad (m) \quad A \leftrightarrow B \quad n \text{ Def. } \leftrightarrow$$

e dato il passo

$$i_1, \dots, i_k \quad (n) \quad A \leftrightarrow B \quad \dots$$

si può scrivere

$$i_1, \dots, i_k \quad (m) \quad (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \quad n \text{ Def. } \leftrightarrow$$

Esercizi (derivazioni notevoli)

Esercizio 7.1: Provare le seguenti utilizzando le dieci regole appena introdotte (ove possibile sarà ripresa la numerazione delle prove o degli esercizi presente nel Lemmon).

- 17** $P \wedge Q \dashv\vdash Q \wedge P$ (esempio di *Commutatività* di $\wedge$)
- 19** $P \vee Q \dashv\vdash Q \vee P$ (esempio di *Commutatività* di $\vee$)
- 23** $P \rightarrow \neg P \vdash \neg P$ (esempio di *Consequentia mirabilis*)
- 7.1.1** $P \wedge \neg P \vdash Q$ (esempio di *Ex falso quodlibet*)
- 34** $\neg(P \wedge Q), P \vdash \neg Q$ (esempio di *Modus ponendo tollens*)
- 52** $P \vee Q, \neg P \vdash Q$ (esempio di *Modus tollendo ponens* o *Sillogismo disgiuntivo* – al pari di $P \vee Q, \neg Q \vdash P$)
- 1.5.1(g)** $\neg(P \wedge Q) \dashv\vdash \neg P \vee \neg Q$ (esempio di una legge di *de Morgan*)
- 1.5.1(f)** $\neg(P \vee Q) \dashv\vdash \neg P \wedge \neg Q$ (esempio dell'altra legge di *de Morgan*) N.B. Nel Lemmon anche $P \vee Q \dashv\vdash \neg(\neg P \wedge \neg Q)$ e $P \wedge Q \dashv\vdash \neg(\neg P \vee \neg Q)$ sono considerati esempi di *de Morgan*. Inoltre, nel Lemmon c'è un refuso nella soluzione dell'esercizio 1.5.1(g).
- 1.5.1(c)** $P \wedge (Q \vee R) \dashv\vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ (esempio di *Distributività* (di $\wedge$ su $\vee$))
- 1.5.1(d)** $P \vee (Q \wedge R) \dashv\vdash (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ esempio di *Distributività* (di $\vee$ su $\wedge$))
- 1.2.1(j)** $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$ (esempio di *Distributività* di $\rightarrow$)
- 44** $\vdash P \vee \neg P$ (teorema; esempio di legge del *Terzo escluso*)

8 Soluzioni degli esercizi

- 1.1:** No. Va in effetti osservato che “è” è un sostantivo, non un verbo, a differenza di ‘è’. Dunque, la frase è tanto grammaticale quanto ‘Lavorare Napolitano utile’, che non lo è per nulla.
- 1.2:** No, ma Marzio lo è.
- 1.3:** Tutte vere, a parte la terza: ‘Giorgio Barbarelli’ era il nome di Giorgione, non di ‘Giorgione’.
- 2.1.1:** Vera.
- 2.1.2:** Vera.
- 2.1.3:** Falsa, perché Aristotele $\neq$ Teofrasto.
- 2.2.1:** Se x è un uomo, allora x è mortale.
- 2.2.2:** Se A è monosillabica, allora A è tronca.
- 2.2.3:** Se A appartiene all’italiano e $A \neq$ ‘precipitevolissimevolmente’, allora A ha meno di 26 lettere.
- 3.1.1:** Sì.
- 3.1.2:** No; ‘Gigi’ è un’espressione che designa una fbf di L_1 .
- 3.1.3:** No, perché in ‘ $A \Delta \square \Delta \square$ ’ occorre un simbolo, ‘ A ’, che non appartiene al vocabolario di L_1 .
- 3.2.1:** Sì, dato che ‘La neve è bianca’ è vero in italiano.
- 3.2.2:** Parrebbe proprio di no, perché non sembra possibile specificare le fbf di L'' senza far riferimento all’interpretazione dei simboli.
- 3.3.1:** Una: ‘ $1 = 1$ ’.
- 3.3.2:** Sì. Lo scopo dell’esercizio è far notare che, benché nella definizione di L''' ricorra un riferimento alla valutazione di fbf (ossia alle *verità* dell’aritmetica), questo riferimento non è essenziale: potremmo specificare le fbf di L''' senza far riferimento alla valutazione di fbf, ad es. definendo L''' come il linguaggio la cui unica fbf è ‘ $1 = 1$ ’. Di conseguenza, L''' è un linguaggio formale.
- 4.1.1:** Sì, perché il suo vocabolario e le sue regole di formazione sono specificate (e dunque possono essere specificate) senza far nessun riferimento all’interpretazione di simboli e formule.
- 4.1.2:** Sì.
- 4.1.3:** No. Infatti, in ‘ $\square \Delta \square \square$ ’ due occorrenze dello stesso simbolo ricorrono contigue. Dunque, la clausola (a) non ci permette di dire che ‘ $\square \Delta \square \square$ ’ è una fbf di L_2 . Per la clausola (b), possiamo concludere che ‘ $\square \Delta \square \square$ ’ non è una fbf di L_2 .
- 4.2:** *Mutatis mutandis*, le risposte sono identiche a quelle dell’esercizio 4.1.

Si noti che negli esercizi 2.2.2-2.2.3 non è necessario specificare che A è un’espressione, dato che A è una metavariable e dunque, per stipulazione, si usa per parlare solo di espressioni.

- 4.3:** Sì, perché L_2 e L_3 hanno le stesse fbf. Dunque, poiché non vi sono due linguaggi distinti che hanno le stesse fbf, L_2 e L_3 sono lo stesso linguaggio.
- 4.4:** (b) Se x è discendente di A&E, allora ogni figlia/o di x è discendente di A&E. (c) Nessun altro è discendente di A&E.
- 4.5:** (a) Se x è una riproduzione di a , allora x è copia di a . (b) Se x è copia di a , allora ogni riproduzione di x è copia di a . (c) Nient'altro è copia di a .
- 4.6:** (b) Se x è un numero naturale, allora il successore di x è un numero naturale. (c) Nient'altro è un numero naturale.
- 4.7:** (a) Se n è il successore di a , allora n è maggiore di a . (b) Se n è maggiore di a allora il successore di n è maggiore di a . (c) Nient'altro è maggiore di a .
- 5.1.1** L'ambito di $\wedge$ è $P \wedge \neg Q$; l'ambito di $\neg$ è $\neg P$, l'ambito di $\leftrightarrow$ è l'intera fbf; l'ambito di $\rightarrow$ è $P \rightarrow P \vee Q$; l'ambito di $\vee$ è $P \vee Q$.
- 5.1.2** L'ambito di $\vee$ è $P \vee Q$, l'ambito della prima occorrenza di $\wedge$ è l'intera fbf, l'ambito di $\neg$ è $\neg(P \leftrightarrow P \wedge Q)$, l'ambito di $\leftrightarrow$ è $P \leftrightarrow P \wedge Q$; l'ambito della seconda occorrenza di $\wedge$ è $P \wedge Q$.
- 5.2** Un'occorrenza di connettivo è subordinata a un'altra occorrenza di connettivo se e solo se l'ambito della prima è più piccolo ed è nell'ambito della seconda; l'occorrenza di connettivo principale di una formula è quella che ha l'intera formula come ambito.
- 5.2.1** (L'unica occorrenza di) $\leftrightarrow$ è il connettivo principale; $\neg$ è subordinato a $\wedge$ e $\vee$ è subordinato a $\rightarrow$.
- 5.2.2** $\wedge$ è il connettivo principale; $\vee$ è subordinato a $\leftrightarrow$ ed entrambi sono subordinati a $\neg$.

7.1: Di seguito, nell'ordine, alcune possibili soluzioni.

17 $P \wedge Q \dashv\vdash Q \wedge P$

(a) $P \wedge Q \vdash Q \wedge P$

1	(1)	$P \wedge Q$	A
1	(2)	P	1 E $\wedge$
1	(3)	Q	1 E $\wedge$
1	(4)	$Q \wedge P$	2, 3 I $\wedge$

(b) $Q \wedge P \vdash P \wedge Q$

Analoga alla derivazione (a).

19 $P \vee Q \dashv\vdash Q \vee P$

(a) $P \vee Q \vdash Q \vee P$

1	(1)	$P \vee Q$	A
2	(2)	P	A
2	(3)	$Q \vee P$	2 IV
4	(4)	Q	A
4	(5)	$Q \vee P$	4 IV
1	(6)	$Q \vee P$	1, 2, 3, 4, 5 EV

(b) $Q \vee P \vdash P \vee Q$

Analoga alla derivazione (a).

23 $P \rightarrow \neg P \vdash \neg P$

1	(1)	$P \rightarrow \neg P$	A
2	(2)	P	A
1, 2	(3)	$\neg P$	1, 2 MPP
1, 2	(4)	$P \wedge \neg P$	2, 3 I $\wedge$
1	(5)	$\neg P$	2, 4 RAA

7.1.1 $P \wedge \neg P \vdash Q$

1	(1)	$P \wedge \neg P$	A
2	(2)	$\neg Q$	A
1, 2	(3)	$(P \wedge \neg P) \wedge \neg Q$	1, 2 I $\wedge$
1, 2	(4)	$P \wedge \neg P$	3 E $\wedge$
1	(5)	$\neg \neg Q$	2, 4 RAA
1	(6)	Q	5 DN

34 $\neg(P \wedge Q), P \vdash \neg Q$

1	(1)	$\neg(P \wedge Q)$	A
2	(2)	P	A
3	(3)	Q	A
2, 3	(4)	$P \wedge Q$	2, 3 I $\wedge$
1, 2, 3	(5)	$(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$	1, 4 I $\wedge$
1, 2	(6)	$\neg Q$	3, 5 RAA

52 $P \vee Q, \neg P \vdash Q$

1	(1)	$P \vee Q$	A
2	(2)	$\neg P$	A
3	(3)	Q	A

4	(4)	$\neg Q$	A
2, 3	(5)	$P \wedge \neg P$	2, 3 I $\wedge$
2, 3, 4	(6)	$(P \wedge \neg P) \wedge \neg Q$	4, 5 I $\wedge$
2, 3, 4	(7)	$P \wedge \neg P$	6 E $\wedge$
2, 3	(8)	$\neg \neg Q$	4, 7 RAA
2, 3	(9)	Q	8 DN
10	(10)	Q	A
1, 2	(11)	Q	1, 3, 9, 10, 10 EV

1.5.1(g) $\neg(P \wedge Q) \dashv\vdash \neg P \vee \neg Q$

(a)	$\neg(P \wedge Q) \vdash \neg P \vee \neg Q$	
1	(1)	$\neg(P \wedge Q)$ A
2	(2)	$\neg(\neg P \vee \neg Q)$ A
3	(3)	$\neg P$ A
3	(4)	$\neg P \vee \neg Q$ 3 I $\vee$
2, 3	(5)	$(\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg(\neg P \vee \neg Q)$ 2, 4 I $\wedge$
2	(6)	$\neg \neg P$ 3, 5 RAA
2	(7)	P 6 DN
8	(8)	$\neg Q$ A
8	(9)	$\neg P \vee \neg Q$ 8 I $\vee$
2, 8	(10)	$(\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg(\neg P \vee \neg Q)$ 2, 9 I $\wedge$
2	(11)	$\neg \neg Q$ 8, 10 RAA
2	(12)	Q 11 DN
2	(13)	$P \wedge Q$ 7, 12 I $\wedge$
1, 2	(14)	$(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$ 1, 13 I $\wedge$
1	(15)	$\neg \neg(\neg P \vee \neg Q)$ 2, 14 RAA
1	(16)	$\neg P \vee \neg Q$ 15 DN
(b)	$\neg P \vee \neg Q \vdash \neg(P \wedge Q)$	
1	(1)	$\neg P \vee \neg Q$ A
2	(2)	$P \wedge Q$ A
2	(3)	P 2 E $\wedge$
2	(4)	Q 2 E $\wedge$
5	(5)	$\neg P$ A
2, 5	(6)	$P \wedge \neg P$ 3, 5 I $\wedge$
5	(7)	$\neg(P \wedge Q)$ 2, 6 RAA
8	(8)	$\neg Q$ A
2, 8	(9)	$Q \wedge \neg Q$ 4, 8 I $\wedge$
8	(10)	$\neg(P \wedge Q)$ 2, 9 RAA
1	(11)	$\neg(P \wedge Q)$ 1, 5, 7, 8, 10 EV

1.5.1(f) $-(P \vee Q) \dashv\vdash -P \wedge -Q$

(a)		$-(P \vee Q) \vdash -P \wedge -Q$	
1	(1)	$-(P \vee Q)$	A
2	(2)	P	A
2	(3)	$P \vee Q$	2 IV
1, 2	(4)	$(P \vee Q) \wedge -(P \vee Q)$	1, 3 I $\wedge$
1	(5)	$-P$	2, 4 RAA
6	(6)	Q	A
6	(7)	$P \vee Q$	6 IV
1, 6	(8)	$(P \vee Q) \wedge -(P \vee Q)$	1, 7 I $\wedge$
1	(9)	$-Q$	6, 8 RAA
1	(10)	$-P \wedge -Q$	5, 9 I $\wedge$
(b)		$-P \wedge -Q \vdash -(P \vee Q)$	
1	(1)	$-P \wedge -Q$	A
2	(2)	$P \vee Q$	A
3	(3)	P	A
4	(4)	Q	A
1	(5)	$-P$	1 E $\wedge$
1, 3	(6)	$P \wedge -P$	3, 5 I $\wedge$
3	(7)	$-(-P \wedge -Q)$	1, 6 RAA
1	(8)	$-Q$	1 E $\wedge$
1, 4	(9)	$Q \wedge -Q$	4, 8 I $\wedge$
4	(10)	$-(-P \wedge -Q)$	1, 9 RAA
1, 2	(11)	$-(-P \wedge -Q)$	2, 3, 4, 7, 10 E $\vee$
1, 2	(12)	$(-P \wedge -Q) \wedge -(-P \wedge -Q)$	1, 11 I $\wedge$
1	(13)	$-(P \vee Q)$	2, 12 RAA

1.5.1(c) $P \wedge (Q \vee R) \dashv\vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

(a)		$P \wedge (Q \vee R) \vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	
1	(1)	$P \wedge (Q \vee R)$	A
1	(2)	P	1 E $\wedge$
1	(3)	$Q \vee R$	1 E $\wedge$
4	(4)	Q	A
1, 4	(5)	$P \wedge Q$	2, 4 I $\wedge$
1, 4	(6)	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	5 IV
7	(7)	R	A
1, 7	(8)	$P \wedge R$	2, 7 I $\wedge$
1, 7	(9)	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	8 IV
1	(10)	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	3, 4, 6, 7, 9 E $\vee$

(b)	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \vdash P \wedge (Q \vee R)$		
1	(1)	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	A
2	(2)	$P \wedge Q$	A
2	(3)	P	2 E $\wedge$
2	(4)	Q	2 E $\wedge$
2	(5)	$Q \vee R$	4 I $\vee$
2	(6)	$P \wedge (Q \vee R)$	3, 5 I $\wedge$
7	(7)	$P \wedge R$	A
7	(8)	P	7 E $\wedge$
7	(9)	R	7 E $\wedge$
7	(10)	$Q \vee R$	9 I $\vee$
7	(11)	$P \wedge (Q \vee R)$	8, 10 I $\wedge$
1	(12)	$P \wedge (Q \vee R)$	1, 2, 6, 7, 11 E $\vee$

1.5.1(d) $P \vee (Q \wedge R) \dashv\vdash (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

(a)	$P \vee (Q \wedge R) \vdash (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$		
1	(1)	$P \vee (Q \wedge R)$	A
2	(2)	P	A
2	(3)	$P \vee Q$	2 I $\vee$
2	(4)	$P \vee R$	2 I $\vee$
2	(5)	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	3, 4 I $\wedge$
6	(6)	$Q \wedge R$	A
6	(7)	Q	6 E $\wedge$
6	(8)	R	6 E $\wedge$
6	(9)	$P \vee Q$	7 I $\vee$
6	(10)	$P \vee R$	8 I $\vee$
6	(11)	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	9, 10 I $\wedge$
1	(12)	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	1, 2, 5, 6, 11 E $\vee$

(b)	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R) \vdash P \vee (Q \wedge R)$		
1	(1)	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	A
1	(2)	$P \vee Q$	1 E $\wedge$
1	(3)	$P \vee R$	1 E $\wedge$
4	(4)	P	A
4	(5)	$P \vee (Q \wedge R)$	4 I $\vee$
6	(6)	Q	A
7	(7)	R	A
6, 7	(8)	$Q \wedge R$	6, 7 I $\wedge$
6, 7	(9)	$P \vee (Q \wedge R)$	8 I $\vee$
1, 6	(10)	$P \vee (Q \wedge R)$	3, 4, 5, 7, 9 E $\vee$
1	(11)	$P \vee (Q \wedge R)$	2, 4, 5, 6, 10 E $\vee$

Questa prova è interessante. Consideriamo la disgiunzione 2. Le due prove che terminano ai passi 5 e 10 mostrano che la conclusione segue da ciascuno dei disgiunti (al più data l'assunzione 1). Basta citare quelle prove al passo 11 per poter introdurre la conclusione in virtù di E $\vee$.

1.2.1(j) $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$ ⁷

1	(1)	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	A
2	(2)	$P \rightarrow Q$	A
3	(3)	P	A
2, 3	(4)	Q	2, 3 MPP
1, 3	(5)	$Q \rightarrow R$	1, 3 MPP
1, 2, 3	(6)	R	4, 5 MPP
1, 2	(7)	$P \rightarrow R$	3, 6 PC
1	(8)	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$	2, 7 PC

44 $\vdash P \vee \neg P$

1	(1)	$\neg(P \vee \neg P)$	A
2	(2)	P	A
2	(3)	$P \vee \neg P$	2 IV
1, 2	(4)	$(P \vee \neg P) \wedge \neg(P \vee \neg P)$	1, 3 I $\wedge$
1	(5)	$\neg P$	2, 4 RAA
1	(6)	$P \vee \neg P$	5 IV
1	(7)	$(P \vee \neg P) \wedge \neg(P \vee \neg P)$	1, 6 I $\wedge$
	(8)	$\neg \neg(P \vee \neg P)$	1, 7 RAA
	(9)	$P \vee \neg P$	8 DN

⁷N.B. È possibile dimostrare anche $(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R) \vdash P \rightarrow (Q \rightarrow R)$. Una possibile prova è:

1	(1)	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$	A
2	(2)	P	A
3	(3)	Q	A
2, 3	(4)	$P \wedge Q$	2, 3 I $\wedge$
2, 3	(5)	Q	4 E $\wedge$
3	(6)	$P \rightarrow Q$	2, 5 PC
1, 3	(7)	$P \rightarrow R$	1, 6 MPP
1, 2, 3	(8)	R	2, 7 MPP
1, 2	(9)	$Q \rightarrow R$	3, 8 PC
1	(10)	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	2, 9 PC

Sezione 2

Semantica e metalogica del calcolo enunciativo

1 Regole derivate

Nella prima sezione, abbiamo incontrato le **regole primitive** del calcolo enunciativo, ossia le regole che sono enunciate nella definizione del calcolo. Quelle regole individuano la classe di tutte e solo le sequenze derivabili del calcolo. Tecnicamente, dunque, nessun'altra regola è indispensabile. È tuttavia importante disporre di regole ausiliarie, che se pure non contribuiscono ad ampliare la classe delle sequenze derivabili, si rivelano utili tanto nelle derivazioni all'interno del calcolo, tanto nella dimostrazione di teoremi che riguardano il calcolo (o metateoremi).

Regole primitive

Per cominciare, introduciamo la nozione di **sostituzione** di una fbf, come segue (v. anche Lemmon, p. 60). Una sostituzione è una fbf ottenuta da una fbf data sostituendo *opportunamente* una o più lettere enunciative che vi ricorrono con una o più fbf. Sostituire opportunamente è sostituire in ossequio a due semplicissime regole: (i) la sostituzione deve essere *completa*, ossia devono essere sostituite tutte le occorrenze di una lettera enunciativa, e (ii) la sostituzione deve essere *uniforme*, ossia lettere uguali devono essere sostituite con fbf uguali. Così, ad es. le seguenti sono tutte sostituzioni di $P \wedge \neg P \rightarrow Q$:

Sostituzioni

$$\begin{array}{ll}
 Q \wedge \neg Q \rightarrow R & [Q \text{ al posto di } P, R \text{ di } Q] \\
 (P \vee P) \wedge \neg(P \vee P) \rightarrow Q & [P \vee P \text{ al posto di } P] \\
 R \wedge \neg R \rightarrow R \wedge \neg(Q \vee \neg R \leftrightarrow Q \wedge R) & [R \text{ al posto di } P, \\
 & R \wedge \neg(Q \vee \neg R \leftrightarrow Q \wedge R) \text{ di } Q]
 \end{array}$$

En passant, va osservato che le regole (i)-(ii) *non* richiedono che lettere diverse debbano essere sostituite con fbf diverse. Così, ad es. $R \wedge R$ è una sostituzione di $P \wedge Q$. Anche le seguenti osservazioni possono essere utili per comprendere il livello di generalità della nozione di *sostituzione*:

Tutte le fbf del linguaggio sono sostituzioni di P .

Tutte le negazioni, ossia tutte le fbf il cui connettivo principale è '¬', sono sostituzioni di $\neg Q$.

Tutte le congiunzioni sono sostituzioni di $P \wedge Q$, tutte le disgiunzioni sono sostituzioni di $P \vee Q$, ecc.

Tutte le contraddizioni sono sostituzioni di $P \wedge \neg P$.

Impiegando la nozione di *sostituzione* è possibile formulare il seguente principio:

(S₁) Ogni sostituzione di un teorema è un teorema.

Per capire perché (S₁) sia vero, iniziamo considerando la dimostrazione di un teorema qualunque, ad es.

D₁ $\vdash P \rightarrow P$

1	(1)	P	A
	(2)	$P \rightarrow P$	1, 1 PC

Ora si può osservare che non cambia assolutamente nulla, dal punto di vista della adeguatezza e della struttura generale della dimostrazione, se sostituiamo regolarmente P con una qualunque fbf. Poniamo ad es. che P sia sostituita con $R \rightarrow Q \wedge \neg Q$. Il risultato è

D₂ $\vdash (R \rightarrow Q \wedge \neg Q) \rightarrow (R \rightarrow Q \wedge \neg Q)$

1	(1)	$R \rightarrow Q \wedge \neg Q$	A
	(2)	$(R \rightarrow Q \wedge \neg Q) \rightarrow (R \rightarrow Q \wedge \neg Q)$	1, 1 PC

Malgrado le notevoli differenze nelle fbf che compaiono a ciascun passo, la struttura fondamentale (le regole, i numeri delle assunzioni e dei passi cui le regole si applicano) delle derivazioni D₁ e D₂ è la medesima. La ragione appare chiara se si riconsiderano le regole del calcolo. Ad es. PC si applica a qualunque fbf A data l'assunzione B per ottenere $A \rightarrow B$, non importa quali fbf A e B si considerino. Così se, come nel caso della derivazione D₁, PC si applica a P data P stessa come assunzione per ottenere $P \rightarrow P$, allora si applica a qualunque fbf data quella stessa fbf come assunzione, e permette di ottenere un condizionale che ha quella fbf come antecedente e come conseguente. Dunque si applica anche al primo passo di D₂, ossia a $R \rightarrow Q \wedge \neg Q$ data l'assunzione $R \rightarrow Q \wedge \neg Q$, e permette di ottenere $(R \rightarrow Q \wedge \neg Q) \rightarrow (R \rightarrow Q \wedge \neg Q)$. Possiamo quindi concluderne che, se abbiamo la prova che una certa fbf è un teorema, allora esiste anche una prova che dimostra, per qualunque sostituzione di fbf, che quella sostituzione è un teorema. Ponendo che la sostituzione di una fbf sia stata ottenuta rimpiazzando alcune lettere enunciative X con le fbf Y, la prova della sostituzione si ottiene rimpiazzando opportunamente nella prova originale le lettere X con le fbf Y. Certo, non è umanamente possibile scrivere tutte quelle prove. Eppure abbiamo la garanzia che esistono e che potremmo, in linea di principio, costruirle. Tanto basta per concludere che (S₁) è vero.

La nozione di sostituzione è facilmente estendibile alle sequenze. La sostituzione di una sequenza è una sequenza ottenuta da una sequenza data rimpiazzandone (uniformemente e completamente) una o più lettere enunciative con una o più fbf. Così, ad es., $P \wedge R \vdash (P \wedge R) \vee Q$ è una sostituzione di $P \vdash P \vee Q$. Per ragioni del tutto analoghe a quelle viste nel caso di (S₁), anche il seguente principio è vero:

(S₂) Se una sequenza è derivabile, allora ogni sua sostituzione è derivabile.

Adesso possiamo tornare alle regole ausiliarie di cui si diceva poco fa, iniziando con un esempio. Al termine della prima sezione abbiamo dimostrato $\vdash P \vee \neg P$ (prova 44)¹. Poniamo ora di voler dimostrare $\vdash (P \vee \neg P) \vee Q$. Basta un breve istante di riflessione per rendersi conto che la prova di questo teorema si può ricavare direttamente dalla prova 44 aggiungendovi, come ultimo passo,

$$(10) \quad (P \vee \neg P) \vee Q \quad 9 \text{ IV}$$

La semplice esistenza della prova 44 ci basta per sapere che $P \vee \neg P$ è un teorema. Riscrivere la prova sarebbe un esercizio inutile e, poiché la vita è breve, controproducente. La nostra prima regola ausiliaria si chiama **introduzione del teorema (IT)** e ci autorizza, nel caso esista la prova di un teorema, a scrivere quel teorema senza assunzioni a qualunque passo di una derivazione, a patto di introdurre un riferimento alla sua prova. Questa è la regola per come è introdotta nel Lemmon. Per praticità, possiamo sostituire il riferimento alla prova con il nome tradizionale, se ve n'è uno, del principio di cui quel teorema è un esempio. Nel caso di $P \vee \neg P$ si tratta di 'terzo escluso'. Così, ad es., per dimostrare $\vdash (P \vee \neg P) \vee Q$ possiamo scrivere:

La regola di introduzione del teorema (IT)

$$1.1 \vdash (P \vee \neg P) \vee Q$$

$$\begin{array}{ll} (1) & (P \vee \neg P) \quad \text{IT 44 (o anche 'IT terzo escluso')} \\ (2) & (P \vee \neg P) \vee Q \quad 1 \text{ IV} \end{array}$$

Per (S₁) sappiamo, d'altra parte, che qualunque sostituzione di un teorema è un teorema. Dunque sappiamo anche che esiste una prova che una qualunque sostituzione di $P \vee \neg P$ è un teorema. Se intendiamo provare, o utilizzare in una derivazione, la sostituzione di un teorema, possiamo dunque scriverla senza assunzioni a qualunque riga di una derivazione, a patto di introdurre un opportuno riferimento e di segnalare, scrivendo '(S)' dopo IT, che stiamo introducendo una sostituzione di quel teorema. Ad es. per dimostrare $\vdash \neg Q \vee \neg \neg Q$ possiamo scrivere²:

$$1.2 \vdash \neg Q \vee \neg \neg Q$$

$$(1) \quad \neg Q \vee \neg \neg Q \quad \text{IT(S) 44 (o anche 'IT terzo escluso')}$$

¹Ecco la prova:

$$44 \vdash P \vee \neg P$$

1	(1)	$\neg(P \vee \neg P)$	A
2	(2)	P	A
2	(3)	$P \vee \neg P$	2 IV
1, 2	(4)	$(P \vee \neg P) \wedge \neg(P \vee \neg P)$	1, 3 I $\wedge$
1	(5)	$\neg P$	2, 4 RAA
1	(6)	$P \vee \neg P$	5 IV
1	(7)	$(P \vee \neg P) \wedge \neg(P \vee \neg P)$	1, 6 I $\wedge$
	(8)	$\neg \neg(P \vee \neg P)$	1, 7 RAA
	(9)	$P \vee \neg P$	8 DN

²Si noti che, se si fa riferimento al nome del principio logico di cui il teorema già provato è un esempio, allora non è indispensabile scrivere '(S)'.

Una regola analoga a IT vale anche per le sequenze, ed è la regola di **introduzione della sequenza (IS)**. Ad es., sempre alla fine della prima sezione, abbiamo provato un esempio del principio noto come *ex falso quodlibet*, ossia $P \wedge \neg P \vdash Q$ (prova 7.1.1). IS ci autorizza a utilizzare quella sequenza nel corso di altre derivazioni. Per l'esattezza, se a qualunque passo di una derivazione ricorre $P \wedge \neg P$, date eventualmente certe assunzioni, possiamo scrivere Q , che dipende dalle stesse assunzioni da cui dipende $P \wedge \neg P$. Così ad es. per dimostrare $(P \wedge \neg P) \wedge R \vdash Q$ possiamo scrivere:

1.3 $(P \wedge \neg P) \wedge R \vdash Q$

1	(1)	$(P \wedge \neg P) \wedge R$	A
1	(2)	$P \wedge \neg P$	1 E $\wedge$
1	(3)	Q	2 IS 7.1.1 (o anche 'IS ex falso quodlibet')

Il principio (S2), poi, ci autorizza a derivare, data qualunque sostituzione di $P \wedge \neg P$ (ossia qualunque contraddizione), qualunque sostituzione di Q (ossia qualunque fbf). Questa conclusione ci permette, volendo, di formulare una nuova regola del calcolo, ossia la regola per cui da una contraddizione (date certe assunzioni) segue una qualunque fbf (date quelle stesse assunzioni), ossia $\frac{X \vdash A \wedge \neg A}{X \vdash B}$. Questa regola, l'*ex falso quodlibet*, benché sia dimostrabilmente

impeccabile, non è parte della nostra definizione del calcolo. Regole con queste caratteristiche sono dette **regole derivate** e sono contrapposte alle **regole primitive**, ossia alle regole che sono parte della definizione del calcolo³. In altri termini, le regole derivate seguono dalle regole primitive del calcolo, benché non siano incluse nella definizione del calcolo. Anche le regole di introduzione del teorema e della sequenza sono regole derivate, in questo senso.

Esercizio 1.1: Provare le seguenti sequenze, impiegando regole derivate.

1.1.1 $\vdash (P \vee (Q \wedge R \rightarrow Q)) \vee \neg(P \vee (Q \wedge R \rightarrow Q))$

1.1.2 $\neg(Q \wedge P) \vee \neg P \vdash \neg P \vee \neg Q$

1.1.3 $(P \wedge Q) \wedge ((P \rightarrow Q) \vee R) \vdash ((P \wedge Q) \wedge (P \rightarrow Q)) \vee ((P \wedge Q) \wedge R)$

³Che una regola sia primitiva o derivata non dipende dal calcolo, bensì dalla definizione del calcolo che si decide di adottare. *Ex falso*, ad es., è parte di alcune definizioni del calcolo enunciativo, alternative rispetto a quella presentata nel Lemmon. Date tali definizioni, *ex falso* conta come una regola primitiva del calcolo enunciativo.

2 Prove per induzione

Il linguaggio della logica enunciativa (ossia la classe delle ffbf di tale linguaggio) soddisfa il seguente principio di induzione:

Principio di induzione per il linguaggio Sia $\mathcal{P}$ una proprietà qualunque (es. avere un numero pari di parentesi, essere una tautologia, essere blu ecc.). Se i seguenti sono veri

- (a) Se A è una lettera enunciativa, allora A ha $\mathcal{P}$;
- (b) Se le ffbf A e B hanno $\mathcal{P}$, allora $\neg A$, $(A \rightarrow B)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ e $(A \leftrightarrow B)$ hanno $\mathcal{P}$;

allora tutte le ffbf del linguaggio del calcolo proposizionale hanno $\mathcal{P}$ ⁴.

Analogamente, il calcolo enunciativo soddisfa il seguente principio di induzione:

Principio di induzione per il calcolo Se i seguenti sono veri

- (a) Ogni sequenza $A \vdash A$ ha $\mathcal{P}$;
- (b) i. Se $X \vdash A \rightarrow B$ e $Y \vdash A$ hanno $\mathcal{P}$ allora $X, Y \vdash B$ ha $\mathcal{P}$; *MPP*
 ii. Se $X \vdash A \rightarrow B$ e $Y \vdash \neg B$ hanno $\mathcal{P}$ allora $X, Y \vdash \neg A$ ha $\mathcal{P}$; *MTT*
 iii. $X \vdash A$ ha $\mathcal{P}$ se e solo se $X \vdash \neg \neg A$ ha $\mathcal{P}$; *DN*
 iv. Se $X, A \vdash B$ ha $\mathcal{P}$ allora $X \vdash A \rightarrow B$ ha $\mathcal{P}$; *PC*
 v. Se $X \vdash A$ e $Y \vdash B$ hanno $\mathcal{P}$ allora $X, Y \vdash A \wedge B$ ha $\mathcal{P}$; *I $\wedge$*
 e così via per le sequenze derivabili in virtù delle rimanenti regole del calcolo, ossia *E $\wedge$* , *I $\vee$* , *E $\vee$* , *RAA*;

allora tutte le sequenze derivabili hanno $\mathcal{P}$ ⁵.

Nelle prove per induzione sulle ffbf o sulle sequenze si sfrutta la validità di questi principi. Consideriamo ad es. la seguente dimostrazione per induzione sulle ffbf di un banalissimo metateorema, ossia che *ciascuna ffbf è tale che vi occorre almeno una lettera enunciativa*. Lo schema della dimostrazione si ricava dal principio di induzione per il linguaggio, sostituendo ' $\mathcal{P}$ ' con 'è tale che vi occorre almeno una lettera enunciativa'. In primo luogo (a) si mostra che se A è una lettera enunciativa allora A è tale che vi occorre almeno una lettera enunciativa. Questo è ovvio, perché date le nostre assunzioni in A occorre esattamente una lettera enunciativa. Poi (b) si assume che ciascuna delle due ffbf A e B sia tale che vi occorre almeno una lettera enunciativa, e si dimostra che anche $\neg A$, $(A \rightarrow B)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ e $(A \leftrightarrow B)$ sono tali che vi occorre almeno una lettera enunciativa. La conclusione si ottiene osservando che A ha un'occorrenza in $\neg A$,

⁴La dimostrazione è piuttosto semplice (ma non è essenziale ricordarla per l'esame). Le clausole (a)-(b) ci dicono che tutte le formule del linguaggio che o sono lettere predicative, oppure sono ottenibili preponendo ' $\neg$ ' a una ffbf o interponendo uno degli altri connettivi tra due ffbf (e ponendo tutto tra parentesi) hanno $\mathcal{P}$. Ma per la definizione del linguaggio sappiamo che quelle sono tutte e solo le ffbf del linguaggio. Dunque, se si danno le clausole (a) e (b), allora tutte le ffbf del linguaggio hanno $\mathcal{P}$.

⁵La dimostrazione è analoga alla precedente, solo che stavolta le clausole (a)-(b) ci dicono che tutte le sequenze derivabili in virtù della regola di assunzione o derivabili in virtù di una delle altre regole del calcolo da altre sequenze derivabili hanno $\mathcal{P}$. Poiché sappiamo che queste sono tutte e solo le sequenze derivabili del calcolo, possiamo concludere che tutte le sequenze derivabili del calcolo hanno $\mathcal{P}$.

$(A \rightarrow B)$, $(A \wedge B)$ ecc.; quindi in tutte queste ultime occorrono almeno le lettere enunciative che occorrono in A , e dunque almeno una lettera enunciativa date le nostre assunzioni. Per il principio di induzione, possiamo concludere che ciascuna fbf è tale che vi occorre almeno una lettera enunciativa.

Esercizio 2.1: Dimostrare per induzione sulle fbf che nessuna fbf del linguaggio della logica enunciativa termina con un'occorrenza di '('.

Esercizio 2.2: Dimostrare per induzione sulle fbf che in tutte le fbf del linguaggio della logica enunciativa occorre un numero pari di parentesi

3 Semantica e tautologie

Nella semantica standard del calcolo proposizionale, le lettere enunciative sono interpretate su **valori di verità**. I valori di verità sono due: **il vero** (abbr. 'V') e **il falso** (abbr. 'F'). L'abbinamento di ciascuna lettera enunciativa del linguaggio a un valore di verità si dice **assegnazione** di valori di verità. Sotto un'assegnazione, a ciascuna lettera enunciativa del linguaggio corrisponde uno e un solo valore di verità.

A ciascun connettivo logico, d'altra parte, corrisponde una regola che permette di determinare, dati i valori di verità delle fbf cui il connettivo si applica, il valore di verità delle fbf risultanti. Ad esempio, e intuitivamente, la regola corrispondente al connettivo ' $\wedge$ ' dice che una congiunzione $A \wedge B$ è vera se entrambi i congiunti A e B sono veri, ed è falsa altrimenti. In modo più pratico per molti scopi, questa regola può essere espressa mediante la seguente **matrice**:

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Qui A e B sono fbf qualunque; le prime due colonne indicano tutti i valori di verità che, al più, A e B possono avere; la terza indica i corrispondenti valori di $A \wedge B$. Questa matrice ci permette di calcolare il valore di verità di tutte le congiunzioni di cui sia noto il valore dei congiunti. Ad es. data un'assegnazione che abbina il vero (ossia V) alla lettera enunciativa P e abbina F alla lettera Q , possiamo stabilire che $P \wedge Q$ è falsa (ossia che il suo valore è F) in quell'assegnazione. Una volta stabilito questo, possiamo anche stabilire che $(P \wedge Q) \wedge P$ è falsa in quell'assegnazione, e così via.

Ecco le matrici corrispondenti agli altri connettivi:

A	$\neg A$	A	B	$A \rightarrow B$	A	B	$A \vee B$	A	B	$A \leftrightarrow B$
V	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	F	V	V	F	F
F	V	F	V	V	F	V	V	F	V	F
		F	F	V	F	F	F	F	F	V

È possibile dimostrare che, data un'assegnazione e date queste regole, è dato anche il valore di verità di *tutte* le fbf (benché sia umanamente impossibile scoprire il valore di tutte le fbf in un'assegnazione). La dimostrazione procede

per induzione sulle fbf. Innanzitutto (a), sappiamo che, data un'assegnazione, il valore di verità delle lettere enunciative (ossia di $P, Q, R, \dots$) è dato. Non resta che (b) dimostrare che, in generale, se il valore di verità di una qualunque fbf A e di una qualunque fbf B è dato – e quale che sia –, allora è dato anche il valore di $\neg A$, $A \rightarrow B$, $A \wedge B$, $A \vee B$ e $A \leftrightarrow B$. Ma questo è evidente dalle regole scritte sopra sotto forma di matrici. Ad es. posto che il valore di verità di A sia dato, vi sono al più due possibilità, ossia che A abbia valore V oppure abbia valore F. Ma in ogni caso, è dato anche il valore di $\neg A$, ossia F se il valore di A è V, e V altrimenti. E analogamente per $A \rightarrow B$, $A \wedge B$, ecc. Dunque, date le nostre regole e un'assegnazione di valore alle lettere enunciative, il valore di verità *tutte* le fbf del linguaggio è dato. Un esempio potrà chiarire quando detto finora. Supponiamo che il valore di P sia V e il valore di Q sia F in una certa assegnazione, e consideriamo la fbf

$$(1) \neg((P \wedge Q) \vee (P \rightarrow Q))$$

Come abbiamo visto nella precedente sezione, assieme alla stessa (1), le seguenti sono tutte e solo le fbf che hanno un'occorrenza in (1)

$$(2) P$$

$$(3) Q$$

$$(4) P \wedge Q$$

$$(5) P \rightarrow Q$$

$$(6) (P \wedge Q) \vee (P \rightarrow Q)$$

Poiché i valori di verità di (2) e (3) sono dati (V e F rispettivamente), sono dati anche i valori di verità di (4) e (5) (F per entrambe). Dati i valori di verità di (4) e (5), è dato anche il valore di (6) (di nuovo F). Infine, dato il valore di (6) è dato anche il valore di (1) (ossia V).

Più concisamente, le relazioni tra i valori di verità di (1) e delle altre fbf che vi ricorrono possono essere espresse attraverso la seguente tabella:

P	Q	$P \wedge Q$	$P \rightarrow Q$	$(P \wedge Q) \vee (P \rightarrow Q)$	$\neg((P \wedge Q) \vee (P \rightarrow Q))$
V	F	V	F	F	V

o, in modo ancora più compatto, così:

P	Q	$\neg((P \wedge Q) \vee (P \rightarrow Q))$
V	F	V

In quest'ultima tabella, il valore dell'intera formula è quello che compare sotto il suo connettivo principale, qui ' $\neg$ '. Poiché in ultima analisi quello che intendevamo trovare era il valore di verità dell'intera formula, e non il modo in cui quel valore è stato individuato mediante l'individuazione del valore delle fbf che vi ricorrono, possiamo anche limitarci a scrivere

P	Q	$\neg((P \wedge Q) \vee (P \rightarrow Q))$
V	F	V

In logica, usualmente, non si è interessati ai valori di verità che una fbf ha data una specifica assegnazione, quanto piuttosto ai valori di verità che la fbf *può*

avere. A questo fine, si assume che vi sia un'assegnazione per ciascuna possibile combinazione di valori di verità delle lettere enunciative. Poi si considerano tutti i diversi valori che la fbf assume in diverse assegnazioni. Ad es., la tabella completa dei possibili valori di verità di $\neg((P \wedge Q) \vee (P \rightarrow Q))$ appare così:

P	Q	$\neg((P \wedge Q) \vee (P \rightarrow Q))$
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	F

D'ora in poi, parleremo di **tavole di verità** per indicare tabelle in cui compaiono, alla prima riga, le lettere enunciative che ricorrono in una o più fbf seguite da quelle stesse fbf e, alle altre righe, tutti i diversi valori di verità che le lettere enunciative e le fbf assumono in diverse assegnazioni.

Si dicono **tautologie** o **fbf tautologiche** le fbf vere in ogni assegnazione, *Tautologie* ad es.

P	$P \rightarrow P$
V	V
F	V

P	Q	$P \wedge Q \rightarrow (P \leftrightarrow Q)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	V

P	Q	R	$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \leftrightarrow P \wedge Q \rightarrow R$
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V
F	F	F	V

Si dicono **incoerenze** o **fbf incoerenti** le fbf false in ogni assegnazione, ad *Incoerenze* es.

P	$P \wedge \neg P$
V	F
F	F

P	Q	$P \wedge Q \leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	F

P	Q	R	$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \leftrightarrow P \wedge Q \wedge \neg R$
V	V	V	F
V	V	F	F
V	F	V	F
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	F

Tradizionalmente, si dicono **contingenti** le proposizioni che possono essere vere e possono essere false. Assumendo che tutte le lettere enunciative che ricorrono in una fbf A “traducano” proposizioni contingenti, si può dire che A è contingente se e solo se A è vera in alcune assegnazioni e falsa in altre.

Esercizi

Esercizio 3.1: Scrivere la tavola di verità delle seguenti e precisare se si tratta di fbf tautologiche, incoerenti o contingenti.

3.1.1 $P \leftrightarrow \neg P$

3.1.2 $P \wedge \neg Q \rightarrow P$

3.1.3 $P \vee Q \rightarrow P$

3.1.4 $P \rightarrow (Q \rightarrow (R \rightarrow P))$

4 Semantica e sequenze

Intuitivamente, il seguente argomento è “buono”:

- (1) È caldo
 Piove.
 Dunque, è caldo e piove.

Invece, il seguente è “cattivo”:

- (2) È caldo.
 Dunque, piove.

Per stabilire se un argomento è “buono” o “cattivo”, possiamo procedere come segue. Innanzitutto chiediamoci se è possibile che tutte le premesse dell’argomento siano vere. Se la risposta è no, l’argomento è “buono”. Altrimenti, chiediamoci se, posto che tutte le premesse siano vere, è possibile che la conclusione sia falsa. Se la risposta è ancora sì, allora l’argomento è “cattivo”, altrimenti è “buono”. Ad esempio, nel caso di (2), si osserva che si possono dare situazioni in cui tutte le premesse, in questo caso l’unica premessa, è vera. Nulla vieta che sia caldo. Dunque, la risposta alla prima domanda è sì. Adesso dobbiamo chiederci se in almeno alcune di tali situazioni possibili la conclusione sia falsa. La risposta è di nuovo affermativa. Ci sono certamente situazioni possibili in cui è caldo ma non piove. Possiamo quindi concludere che (2) è “cattivo”, in accordo con le

intuizioni. Nell'altro esempio, (1), le cose vanno diversamente. Certo, la risposta alla prima domanda è ancora sì, perché possono ben darsi situazioni in cui è vero sia che piove sia che è caldo. E tuttavia, in nessuna di tali situazioni possibili è falso che piove ed è caldo, e quindi la risposta alla seconda domanda è no. Possiamo concluderne che (1) è “buono”.

Un argomento “buono” in questo senso si dice **valido**, un argomento “cattivo” **invalido**. In modo leggermente più rigoroso, la nozione di argomento (logicamente) valido può essere introdotta così:

Argomenti validi e invalidi

Def. argomento valido Un argomento è valido $=_{df}$ non è logicamente possibile che tutte le sue premesse siano vere e la conclusione falsa.

Attraverso la semantica presentata nel precedente paragrafo è possibile individuare le sequenze corrispondenti ad alcuni argomenti validi, quelli la cui validità dipende, intuitivamente, dal significato dei connettivi logici ($'\neg'$, $'\wedge'$, $'\vee'$, $'\rightarrow'$ e $'\leftrightarrow'$). Queste sequenze si dicono **tautologiche**, e sono tali che, se la loro conclusione è falsa in un'assegnazione, allora almeno una loro premessa è falsa in quell'assegnazione. In altri termini:

Sequenze tautologiche

Def. sequenza tautologica Una sequenza con premesse in X e conclusione A è tautologica $=_{df}$ in nessuna assegnazione tutte le premesse in X sono vere e A è falsa.

Utilizzando le tavole di verità, possiamo verificare se una sequenza è o non è tautologica. È sufficiente scrivere la tavola di verità di tutte le premesse e della conclusione, e poi controllare se, per almeno una riga, tutte le premesse sono vere e la conclusione falsa. Consideriamo ad es. le sequenze $P \wedge Q \vdash P \rightarrow Q$ e $P \vee Q \vdash P \rightarrow Q$:

P	Q	$P \wedge Q$	$P \rightarrow Q$		P	Q	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$
V	V	V	V		V	V	V	V
V	F	F	F	$\Rightarrow$	V	F	V	F
F	V	F	V		F	V	V	V
F	F	F	V		F	F	F	V

La prima è tautologica, poiché per nessuna assegnazione $P \wedge Q$ è vera e $P \rightarrow Q$ falsa. La seconda non lo è: data un'assegnazione in cui il valore di P è V e il valore di Q è F, $P \vee Q$ è vera e $P \rightarrow Q$ falsa. In modo analogo, possiamo stabilire che $\neg P, \neg \neg P \vdash \neg Q$ è tautologica, mentre $\neg P, P \rightarrow Q \vdash P \vee Q$ non lo è:

P	Q	$\neg P$	$\neg \neg P$	$\neg Q$		P	Q	$\neg P$	$P \rightarrow Q$	$P \vee Q$
V	V	F	V	F		V	V	F	V	V
V	F	F	V	V		V	F	F	F	V
F	V	V	F	F		F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	$\Rightarrow$	F	F	V	V	F

Dalla definizione di sequenza tautologica, segue che una sequenza *senza premesse* è tautologica se e solo se la sua conclusione è una tautologia. Così, ad es., la sequenza $\vdash P \rightarrow (Q \rightarrow (R \rightarrow P))$ è tautologica dato che, come si è visto risolvendo l'esercizio 3.1.4, $P \rightarrow (Q \rightarrow (R \rightarrow P))$ è una tautologia.

Sequenze con un insieme vuoto di premesse

Esercizi

Esercizio 4.1: Stabilire con il metodo delle tavole di verità se queste sequenze sono tautologiche:

4.1.1 $P, Q, R \vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow R$

4.1.2 $P, Q \vdash P \vee Q$

4.1.3 $P \vdash P \wedge (Q \vee P)$

5 Coerenza e completezza (cose da sapere ai fini dell'esame)

Ai fini dell'esame, non è indispensabile ricordare nel dettaglio le dimostrazioni dei metateoremi di coerenza e completezza, anche se è essenziale *aver compreso* quelle dimostrazioni, e (aver compreso e) ricordare quanto segue.

5.1 Metateorema di coerenza

Formulazione Il calcolo enunciativo è coerente: nessun teorema del calcolo è una contraddizione, ossia nessuna fbf di forma $A \wedge \neg A$ è un teorema.

Dimostrazione del metateorema di coerenza La dimostrazione passa attraverso la dimostrazione di due metateoremi ausiliari:

Metateorema 1 Ogni sequenza derivabile è tautologica.

Dimostrazione del metateorema 1 La dimostrazione è per induzione sulle sequenze.

(a) Prima si considerano le sequenze derivabili in virtù della regola di assunzione, e dunque tutte quelle di forma $A \vdash A$. È facile mostrare che qualunque siffatta sequenza è tautologica, perché naturalmente se una fbf è vera allora quella stessa fbf è vera.

(b) Poi si procede dimostrando, per ciascuna altra regola del calcolo che, se le sequenze su cui la regola si applica sono tautologiche, allora le sequenze che si possono ottenere da quelle per applicazione della regola sono a loro volta tautologiche. Non è essenziale ricordare i dettagli, e ci si può limitare ai passi della dimostrazione relativi a qualche regola. Consideriamo ad es. $E\wedge$, ossia

$$\frac{X \vdash A \quad Y \vdash B}{X, Y \vdash A \wedge B}.$$

Iniziamo assumendo che $X \vdash A$ e $Y \vdash B$ siano entrambe tautologiche. Data questa assunzione, è facile mostrare che anche $X, Y \vdash A \wedge B$ è tautologica. Poniamo infatti per assurdo che non lo sia. In tal caso, per almeno un'assegnazione, tutte le premesse in X e Y devono essere vere e $A \wedge B$ falsa. Ma in tale assegnazione anche A e B devono essere vere, perché altrimenti $X \vdash A$ e $Y \vdash B$ non potrebbero essere entrambe tautologiche, contrariamente alle nostre assunzioni. Ma se A e B sono entrambe vere in quell'assegnazione, allora *deve* essere vera anche $A \wedge B$, in virtù della matrice di $\wedge$. Abbiamo così portato all'assurdo l'assunzione che $X, Y \vdash A \wedge B$ *non* fosse tautologica, e dunque mostrato che lo è.

(c) Dimostrando i punti (a) e (b) abbiamo mostrato per induzione che tutte le sequenze derivabili sono tautologiche.

Metateorema 2 Ogni teorema è una tautologia.

Dimostrazione del metateorema 2 Per il metateorema 1, sappiamo che ogni sequenza derivabile è tautologica. Ma i teoremi sono sequenze derivabili (con 0 premesse). Dunque tutti i teoremi sono sequenze tautologiche con 0 premesse, ossia tautologie.

Poiché ovviamente nessuna tautologia è una contraddizione, dal metateorema 2 segue che nessuna sequenza derivabile è una contraddizione.

5.2 Metateorema di completezza

Formulazione Il calcolo enunciativo è completo: ogni sequenza tautologica è derivabile.

Dimostrazione del metateorema di coerenza La dimostrazione passa attraverso la dimostrazione di un lemma ausiliario e di un metateorema ausiliario.

Lemma Data una qualunque fbf A , per ciascuna riga della tavola di verità di A , e dunque per ciascuna assegnazione di valore di verità alle lettere enunciative che ricorrono in A , se A risulta vera in quella riga (assegnazione) allora è derivabile

$$W_1, \dots, W_n \vdash A$$

mentre se A è falsa in quella riga (assegnazione) allora è derivabile

$$W_1, \dots, W_n \vdash \neg A$$

dove $W_1, \dots, W_n$ sono tutte le lettere enunciative che ricorrono in A , che appaiono affermate o negate secondo il valore (V o F rispettivamente) assegnato loro in quella riga della tavola di verità. Posto ad es. che A sia $P \wedge Q$, e data dunque la tavola di verità

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

il lemma dice che sono derivabili tutte le seguenti

$$P, Q \vdash P \wedge Q$$

$$P, \neg Q \vdash \neg(P \wedge Q)$$

$$\neg P, Q \vdash \neg(P \wedge Q)$$

$$\neg P, \neg Q \vdash \neg(P \wedge Q)$$

Dimostrazione del lemma La dimostrazione è per induzione sulle fbf.

(a) Si inizia dimostrando che il lemma vale per le lettere enunciative. Questo è ovvio, perché se A è una lettera enunciativa allora la sua tavola di verità appare così

A	A
V	V
F	F

ed è evidente che tanto $A \vdash A$ tanto $\neg A \vdash \neg A$ sono derivabili, per la regola di assunzione.

(b) Poi si procede dimostrando che, se il lemma si applica alle fbf A e B , allora si applica anche a $\neg A$, $A \rightarrow B$, $A \wedge B$, $A \vee B$ e $A \leftrightarrow B$. Non è essenziale ricordare i dettagli⁶.

(c) Dimostrando i punti (a) e (b) abbiamo mostrato per induzione che il lemma vale per tutte le fbf.

⁶Un esempio può essere utile per ricordare la strategia di prova (non è tuttavia indispensabile tenerlo a mente). Assumiamo ad es. che il lemma valga per A e cerchiamo di mostrare che vale anche per $\neg A$. Vi sono due possibilità, corrispondenti ai possibili valori di verità di A , il vero e il falso. Iniziamo assumendo che A sia vera, e dunque che

Metateorema 3 Tutte le tautologie sono teoremi del calcolo.

Dimostrazione del metateorema 3 Dato il lemma appena dimostrato si può procedere così. Poniamo che A sia una tautologia. In tal caso, sarà vera in *tutte* le assegnazioni, e quindi in ogni riga della tavola di verità. Dunque se il lemma è vero e posto che A sia una tautologia, A è derivabile tanto da tutte le lettere predicative $L_1, \dots, L_n$ che vi ricorrono, tanto da $\neg L_1$ e $L_2, \dots, L_n$, tanto da $\neg L_1, \neg L_2$ e da $L_3, \dots, L_n$, e così via per tutte le combinazioni di affermazioni e negazioni di $L_1, \dots, L_n$. Ma è possibile dimostrare che, se $B \vdash A$ e $\neg B \vdash A$ sono entrambe derivabili, allora A è un teorema (non è importante ricordare i dettagli della dimostrazione⁷). Possiamo quindi trattare la

(1) $W_1, \dots, W_n \vdash A$

sia derivabile. In tal caso, per la matrice della negazione, $\neg A$ è falsa, e dunque dobbiamo mostrare che è derivabile la seguente (dove $W_1, \dots, W_n$ sono come in (1)):

(2) $W_1, \dots, W_n \vdash \neg \neg A$

Ma sotto l'assunzione che (1) sia derivabile, anche (2) lo è, dato che la si può facilmente derivare a partire da (1) tramite una semplice applicazione di DN. Consideriamo ora l'altra possibilità, ossia il caso in cui A sia falsa, e dunque che

(3) $W_1, \dots, W_n \vdash \neg A$

sia derivabile. Per la matrice della negazione, in questo caso $\neg A$ è vera, e dunque dobbiamo mostrare che è derivabile la seguente (dove $W_1, \dots, W_n$ sono come in (3)):

(4) $W_1, \dots, W_n \vdash A$

Ma è ovvio che se (3) è derivabile allora anche (4), ossia la stessa sequenza, lo è.

Ragionare su un caso specifico può essere utile a scopo illustrativo. Consideriamo dunque, ad es., $P \wedge Q$ e assumiamo che le seguenti siano derivabili:

(5) $P, Q \vdash P \wedge Q$

(6) $P, \neg Q \vdash \neg(P \wedge Q)$

(7) $\neg P, Q \vdash \neg(P \wedge Q)$

(8) $\neg P, \neg Q \vdash \neg(P \wedge Q)$

Dobbiamo mostrare il lemma vale per $\neg(P \wedge Q)$. La sua tavola di verità è:

P	Q	$\neg(P \wedge Q)$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

e dunque dobbiamo mostrare che

$P, Q \vdash \neg \neg(P \wedge Q)$

$P, \neg Q \vdash \neg(P \wedge Q)$

$\neg P, Q \vdash \neg(P \wedge Q)$

$\neg P, \neg Q \vdash \neg(P \wedge Q)$

sono tutte derivabili. La dimostrazione è immediata, poiché le ultime tre sono identiche a (6)-(8), che abbiamo assunto essere derivabili, mentre la prima si deriva da (5) per DN.

⁷Ecco una possibile dimostrazione. Poniamo che le seguenti siano entrambe derivabili:

(i) $B \vdash A$

(ii) $\neg B \vdash A$

Allora possiamo dimostrare $\vdash A$, lungo le linee indicate nel seguente schema di derivazioni:

	(1)	$B \vee \neg B$	IT (S) Terzo escluso
2	(2)	B	Ass.
2	(3)	A	1, 2 IS sequenza (i)
4	(4)	$\neg B$	Ass.
4	(5)	A	1, 4 IS sequenza (ii)
	(6)	A	1, 2, 3, 4, 5 EV

seguente come una regola derivata: (RD) $\frac{X, B \vdash A \quad Y, -B \vdash A}{X, Y \vdash A}$.

Applicando un certo numero di volte (RD) possiamo dimostrare che, se A è derivabile da ciascuna combinazione di affermazioni e negazioni di ciascuna delle lettere enunciative $L_1, \dots, L_n$ che ricorrono in A , allora A è derivabile da un insieme vuoto di premesse, ossia A è un teorema. Dunque, se A è una tautologia (e dunque è derivabile per il lemma da tutte le combinazioni di affermazioni e negazioni delle lettere enunciative che vi ricorrono) allora è un teorema.

Dato il metateorema 3, il metateorema di completezza si può dimostrare notando che, se una qualunque sequenza con premesse $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ e conclusione B è tautologica, allora $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (A_3 \rightarrow \dots (A_n \rightarrow B) \dots))$ è una tautologia⁸ e dunque, per il metateorema 3, è un teorema. Ma dal teorema $\vdash A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (\dots (A_n \rightarrow B) \dots))$ è facile derivare $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B$ per ripetute applicazioni di MPP⁹. Dunque, qualunque sequenza tautologica è derivabile.

Va ricordato che questo schema non è un'effettiva prova del calcolo enunciativo. L'effettiva prova si può ottenere sostituendo, nella prova e nelle sequenze (i)-(ii), A e B con due fbf tali che (i) e (ii) dopo la sostituzione risultino entrambe derivabili. Ad es. poniamo che B sia P e A sia $(P \wedge -P) \rightarrow P$. In tal caso, operando le opportune sostituzioni, otteniamo due sequenze derivabili, ossia

(i) $P \vdash (P \wedge -P) \rightarrow P$

(ii) $-P \vdash (P \wedge -P) \rightarrow P$

Ora possiamo dimostrare $\vdash (P \wedge -P) \rightarrow P$ sostituendo regolarmente B con P e A con $(P \wedge -P) \rightarrow P$ nel nostro schema, così:

	(1)	$P \vee -P$	IT (S) Terzo escluso
2	(2)	P	A
2	(3)	$(P \wedge -P) \rightarrow P$	1, 2 IS sequenza (i)
4	(4)	$-P$	A
4	(5)	$(P \wedge -P) \rightarrow P$	1, 4 IS sequenza (ii)
	(6)	$(P \wedge -P) \rightarrow P$	1, 2, 3, 4, 5 EV

⁸Per dimostrarlo è sufficiente riflettere sulla matrice di $\rightarrow$ e sulla nozione di sequenza tautologica. Consideriamo:

(1) $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (A_3 \rightarrow \dots (A_n \rightarrow B) \dots))$

Poniamo che A_1 sia falsa (*in una data assegnazione*, o messo d'ora in poi per brevità). In tal caso, per la matrice di $\rightarrow$, (1) è vera, indipendentemente dal valore di $A_2, A_3, \dots, A_n$ e B . Poniamo ora che A_2 sia falsa. In tal caso, sempre per la matrice di $\rightarrow$,

(2) $A_2 \rightarrow (A_3 \rightarrow \dots (A_n \rightarrow B) \dots)$

è vera, indipendentemente dal valore di $A_3, \dots, A_n$. Ma se (2) è vera, allora è vera anche (1), per la matrice di $\rightarrow$. Analogamente, se A_3 è vera, allora è vera anche

(3) $(A_3 \rightarrow \dots (A_n \rightarrow B) \dots)$

e dunque, di nuovo per la matrice di $\rightarrow$, è vera anche (2) e dunque (1). E così via: se almeno una tra $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ è falsa, allora l'intero condizionale è vero. D'altra parte, se B è vera l'intero condizionale risulta ovviamente vero, sempre per la matrice di $\rightarrow$. In effetti, l'unica assegnazione in cui una fbf $(A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (A_3 \rightarrow \dots (A_n \rightarrow B) \dots)))$ è falsa è un'assegnazione in cui $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ siano tutte vere e B falsa. Se una tale assegnazione esistesse, tuttavia, $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n \vdash B$ non sarebbe tautologica, contro le nostre assunzioni. Dunque, se $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n \vdash B$ è una sequenza tautologica, allora $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (A_3 \rightarrow \dots (A_n \rightarrow B) \dots))$ è una tautologia.

⁹Ad es. dato il teorema

(T1) $\vdash P \rightarrow (Q \rightarrow (R \rightarrow P))$

Esercizio 5.3: Presentare lo schema generale della dimostrazione del metateorema di coerenza.

Esercizio 5.4: Nella dimostrazione del metateorema di completezza per come è presentata nel Lemmon, si fa uso di un lemma che mette in relazione ciascuna riga di ciascuna tavola di verità con una sequenza derivabile. Enunciare brevemente quel lemma..

6 Cenni sulla traduzione nel linguaggio della logica predicativa

Il primo paragrafo del terzo capitolo del Lemmon introduce il linguaggio della logica predicativa. Quello che segue va inteso come un'integrazione, e non una sostituzione, rispetto a quel paragrafo.

Il linguaggio della logica predicativa è più ricco di quello della logica enunciativa, se non altro perché il suo vocabolario contiene più simboli primitivi. In particolare, oltre alle lettere enunciative P, Q ecc., alle parentesi e ai connettivi $\neg, \rightarrow$ ecc., esso include:

Le variabili individuali x, y, z ecc.

I nomi (o costanti individuali) m, n, o ecc., ma anche a, b, c ecc.

Le lettere predicative F, G, H, I ecc.

Il quantificatore esistenziale $(\exists v)$ dove v è una qualunque variabile.

Il quantificatore universale $(\forall v)$, dove v è una qualunque variabile¹⁰.

Il linguaggio della logica predicativa permette di studiare dal punto di vista logico argomenti come i seguenti:

Nico è un gatto.	Nico è un gatto.
Nico è furbo.	Tutti i gatti sono furbi.
(Dunque) qualche gatto è furbo.	(Dunque) Nico è furbo.

A questo fine, è importante individuare un corrispettivo, una 'traduzione formale', di proposizioni dell'italiano nel linguaggio della logica predicativa. Si può procedere per passi, come segue.

Iniziamo occupandoci di frasi semplici in cui una proprietà è attribuita a uno specifico individuo, ad es.

possiamo derivare $P, Q, R \vdash P$ come segue:

1	(1)	P	A
2	(2)	Q	A
3	(3)	R	A
	(4)	$P \rightarrow (Q \rightarrow (R \rightarrow P))$	IT (T ₁)
1	(5)	$Q \rightarrow (R \rightarrow P)$	1, 4 MPP
1, 2	(6)	$R \rightarrow P$	2, 5 MPP
1, 2, 3	(7)	P	3, 6 MPP

¹⁰Oggi è più comune indicare il quantificatore esistenziale senza parentesi, e dunque scrivere $\exists v$ al posto di $(\exists v)$, e il quantificatore universale come $\forall$, e dunque scrivere $\forall v$ al posto di $(\forall v)$.

Nico è furbo.

Fraasi semplici come queste possono essere riscritte con esplicito riferimento a *Fraasi semplici* proprietà, così:

Nico ha la proprietà di essere furbo.

Adesso sostituiamo al nome proprio un nome appartenente al linguaggio formale, ad es. n , e all'espressione che esprime proprietà, ossia 'la proprietà di essere furbo', una lettera predicativa, ad es. F , così:

n ha F

Da questa frase si può ottenere una proposizione del linguaggio del calcolo predicativo eliminando l'espressione 'ha' e invertendo l'ordine relativo del nome e della lettera predicativa:

Fn

Formule come queste si dicono **proposizioni atomiche**. Le proposizioni atomiche possono occorrere in proposizioni più complesse esattamente come le lettere enunciative del calcolo dei predicati. Così ad es.

Nico non è furbo

diviene

$\neg Fn$

e

Nico è un gatto e Nico è furbo

diviene (usando ' G ' per '(un) gatto' – d'ora in poi queste note riguardanti la resa dei nomi propri o dei predicati saranno omesse se non può esservi ambiguità):

$(Gn \wedge Fn)$

Ora occupiamoci delle espressioni 'qualche'/'almeno uno' e simili. Poniamo *'Qualche'* che qualcuno ci dica che qualche gatto è furbo. Per verificare la sua affermazione, basta trovare almeno un ente che è un gatto ed è furbo; per falsificarla bisogna mostrare che è falso che almeno un ente sia un gatto e sia furbo. Dunque, 'Qualche gatto è furbo' è equivalente a 'Almeno un ente è un gatto ed è furbo'. Sostituendo, per ragioni di brevità e perspicuità, 'ente' con una variabile, ad es. x , otteniamo

Almeno un x è tale che x è un gatto e x è furbo.

Adesso possiamo abbreviare ' x è un gatto e x è furbo' analogamente a quanto fatto sopra nel caso di 'Nico è un gatto e Nico è furbo', ottenendo

Almeno un x è tale che $(Gx \wedge Fx)$.

Per finire, sostituiamo 'Almeno un x è tale che' con il quantificatore esistenziale $(\exists x)$:

$(\exists x)(Gx \wedge Fx)$

Questo è il nostro corrispettivo formale di ‘Almeno un (‘Qualche’, ecc.) gatto è furbo’. Consideriamo ora la sua negazione:

$$(1) \neg(\exists x)(Gx \wedge Fx)$$

Data l’interpretazione intesa delle lettere G e F , questa proposizione è equivalente a ‘Non si dà il caso che almeno un gatto sia furbo’, ossia ‘Nessun gatto è furbo’ o, se si vuole,

Nessun x è tale che x è un gatto e x è furbo.

Ora occupiamoci del corrispettivo formale di alcune frasi in cui ricorrono ‘*Tutti*’ espressioni come ‘tutti’ (‘ogni’ ecc.), ad es.

Tutti i gatti sono furbi.

Cominciamo osservando che questa frase è intuitivamente equivalente a

Nessun x è tale che x è un gatto e x non è furbo.

il cui corrispettivo formale si ottiene da (1) negando il secondo congiunto, così:

$$(2) \neg(\exists x)(Gx \wedge \neg Fx)$$

Per la semantica del calcolo enunciativo, sappiamo che $(A \wedge \neg B)$ è equivalente a $\neg(A \rightarrow B)$. Di conseguenza, possiamo sostituire in (2) ‘ $(Gx \wedge \neg Fx)$ ’ con ‘ $\neg(Gx \rightarrow Fx)$ ’, così:

$$\neg(\exists x) \neg(Gx \rightarrow Fx)$$

Potremmo anche fermarci qui. Sta di fatto, tuttavia, che se all’interno di una proposizione ‘ $\neg(\exists v)\neg$ ’ (dove v è una variabile) è sostituito con il nostro quantificatore universale ‘ (v) ’, il risultato è sempre una proposizione equivalente a quella di partenza. L’interpretazione informale del quantificatore universale ‘ (v) ’ è appunto *tutti, ogni*. Il risultato è che la nostra frase di partenza, ossia:

Tutti i gatti sono furbi.

si può rendere come

$$(3) (x)(Gx \rightarrow Fx)$$

Non è sorprendente che nella traduzione formale di ‘Tutti i gatti sono furbi’ ricorra l’implicazione materiale. Dopotutto, fin qui, avevamo sempre trattato condizionali nel cui antecedente e conseguente ricorrono variabili, ad es.

$$(3) \text{ Se } x \text{ è un numero pari minore di } 2 \text{ allora } x = 0.$$

come equivalenti ad affermazioni universali (nel nostro caso, a ‘Tutti i numeri pari minori di 2 sono uguali a 0’). Esattamente questa equivalenza ci autorizza a trattare (3), ossia ‘Ogni x è tale che se x è un gatto allora x è furbo’, come equivalente a ‘Tutti i gatti sono furbi’.

Per verificare che ‘ (x) ’, e dunque ‘ $\neg(\exists x)\neg$ ’, è un adeguato corrispettivo formale di ‘tutti’/‘ogni’, è sufficiente constatare che, in generale,

Non si dà il caso che almeno una cosa non goda di una proprietà F .

è equivalente a

Ogni cosa gode della proprietà F .

Ad es., ‘Non si dà il caso che almeno una cosa non sia estesa’ equivale a ‘Nessuna cosa non è estesa’ e, dunque, a ‘Ogni cosa è estesa’.

Ora siamo in grado di offrire una controparte formale degli argomenti da cui siamo partiti, ossia

Nico è un gatto.	Nico è un gatto.
Nico è furbo.	Tutti i gatti sono furbi.
(Dunque) qualche gatto è furbo.	(Dunque) Nico è furbo.

Rappresentando al solito un’inferenza come una sequenza il cui ultimo elemento è la conclusione, il risultato è rispettivamente:

$$Gn, Fn \vdash (\exists x)(Gx \wedge Fx)$$

$$Gn, (x)(Gx \rightarrow Fx) \vdash Fn$$

Di seguito alcune altre ‘traduzioni’ interessanti dall’italiano al linguaggio del calcolo predicativo, seguite se necessario da qualche nota di commento:

Casi interessanti

(a) Tutti i gatti sono furbi, eccetto i soriani.

(a') ('H' per 'soriani') $(x)(Gx \wedge \neg Hx \rightarrow Fx)$

Intuitivamente, (a) dice che tutti i gatti non soriani sono furbi, ossia che se x è un gatto e x non è soriano, allora x è furbo, come appunto dice (a') (data l'interpretazione intesa delle lettere predicative).

(b) Nessun gatto è furbo.

(b') $\neg(\exists x) - (Gx \wedge Fx)$

(b'') $(x)(Gx \rightarrow \neg Fx)$

Queste sono due versioni equivalenti, in virtù dell'interscambiabilità di $\neg(\exists x) -$ e (x) , e dell'equivalenza tra $\neg(A \wedge B)$ e $(A \rightarrow \neg B)$.

(c) Nessun gatto è furbo, eccetto i soriani

(c') $(x)(Gx \wedge \neg Hx \rightarrow \neg Fx)$

(d) Miù è una gatta che fa le fusa solo se è incinta.

(d') $Gm \wedge (Fm \rightarrow Im)$

Almeno una gatta fa le fusa solo se è incinta.

$(\exists x)(Gx \wedge (Fx \rightarrow Ix))$

Questa frase segue dalla precedente.

Il trattamento degli enunciati relazionali introduce solo alcune modeste complicazioni in questo quadro. Una proposizione relazionale quale ‘Manlio invidia Nicola’ si può rendere come ‘ Imn ’, una proposizione esistenziale quale ‘Qualcuno invidia Manlio’ come ‘ $(\exists x)Ixm$ ’, e una proposizione universale quale ‘Tutti invidiano qualcuno’ come ‘ $(x)(\exists y)Ixy$ ’. Enunciati che coinvolgono relazioni a più di due argomenti (ad es. ‘Manlio ha invitato Nicola a Olbia’) si trattano in modo del tutto analogo (nel nostro caso $Imno$), e comunque possono essere tranquillamente ignorati per i nostri scopi.

Una relazione particolarmente importante è l'**identità**. Per esprimere tale relazione, si usa il segno d'identità ‘=’. Intuitivamente, ‘ $(n = m)$ ’ dice che n e m sono una cosa sola (di regola le parentesi intorno alle formule d'identità si possono omettere). Il segno d'identità ci permette di avere un corrispettivo formale di frasi in cui ‘è’ è seguito da un nome anziché da un predicato. Ad es., ‘Marilyn Monroe è Norma Jean’ può essere reso come ‘ $m = n$ ’ e ‘Marylin non è Olivia’ come ‘ $-(m = o)$ ’ o, più brevemente, come ‘ $m \neq o$ ’. Analogamente, per esprimere l'enunciato che almeno una cosa è Nettuno (ossia che Nettuno esiste) possiamo scrivere ‘ $(\exists x)(n = x)$ ’¹¹

Una seconda ragione per cui il segno d'identità ci interessa è che ci permette di tradurre alcune frasi in cui ricorrono espressioni come ‘unico’, ‘al più un’, e simili. Ad es. per dire che Nathan è l'unico moicano potremmo dire che Nathan è un moicano, e che ogni y o non è un Moicano oppure è Nathan. Il primo congiunto si rende (‘ F ’ per ‘moicano’) come Fn . Il secondo come $(y)(-Fy \vee y = n)$. Poiché sappiamo che $-A \vee B$ equivale a $A \rightarrow B$, una frase come

Nathan è l'unico moicano.

si può rendere come

$$Fn \wedge (y)(Fy \rightarrow y = n)$$

‘C’è un unico moicano’, a questo punto, si può rendere come ‘Almeno un x è un moicano e per ogni y , se y è un moicano allora y è x ’, ossia

$$(\exists x)(Fx \wedge (y)(Fy \rightarrow y = x))$$

Consideriamo ora

C’è al più un moicano (ma potrebbe anche non essercene nessuno).

Intuitivamente, questa frase ci dice, per ogni x , se x è un moicano allora x è l'unico moicano. Sappiamo già che, per dire che un certo oggetto n è l'unico moicano, possiamo scrivere ‘ $(y)(Fy \rightarrow y = n)$ ’, e dunque l'affermazione che per ogni x , se x è un moicano allora x è l'unico moicano si potrà rendere come:

$$(x)(Fx \rightarrow (y)(Fy \rightarrow y = x))$$

In modo equivalente, avremmo potuto dire che, per ogni x e per ogni y , se x è un moicano e y è un moicano, allora x e y sono una cosa sola, ossia

$$(x)(y)(Fx \wedge Fy \rightarrow x = y)$$

¹¹In realtà è controverso se ‘ $(\exists x)(n = x)$ ’ traduca adeguatamente ‘Nettuno esiste’. Le ragioni della controversia non sono tuttavia di immediato interesse per noi e saranno ignorate.

Infine, utilizzando il segno d'identità possiamo ottenere le controparti formali di asserzioni sul numero degli individui di un certo tipo. Ad esempio, 'Ci sono almeno tre francesi' si può rendere come 'Almeno un x , un y e uno z sono francesi e sono tutti distinti l'uno dall'altro', ossia

$$(4) (\exists x)(\exists y)(\exists z)(Fx \wedge Fy \wedge Fz \wedge x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z)$$

Analogamente, 'Ci sono al più due francesi' si può rendere come 'Non ci sono (almeno) tre francesi' — ossia la negazione di (4) — oppure, in modo equivalente, 'Se ci sono due francesi distinti, allora ogni francese è (identico a) uno di quei due', ossia:

$$(x)(y)((Fx \wedge Fy \wedge x \neq y) \rightarrow (z)(Fz \rightarrow z = x \vee z = y))$$

Infine, 'Ci sono *esattamente* due francesi' si può rendere come la congiunzione di 'Ci sono almeno due francesi' e 'Ci sono al più due francesi' o, in modo equivalente, come:

$$(\exists x)(\exists y)(Fx \wedge Fy \wedge x \neq y \wedge (z)(Fz \rightarrow z = x \vee z = y))$$

Intuitivamente (nella nostra interpretazione intesa) questa formula dice che ci sono due francesi distinti e che chiunque sia francese è (identico a) uno di quei due. È facile rendersi conto che questo enunciato è vero se, e soltanto se, ci sono esattamente due francesi.

Per approfondimenti sull'identità, si veda il Lemmon, pp.182-187.

Esercizio 6.1: Tradurre le seguenti nella notazione della logica predicativa (usando le lettere predicative ' F ' e ' G ', ' T ' e il nome ' m ')

- 6.1.1** Ogni francese è o francese o greco.
- 6.1.2** Nessun francese è sia greco sia irlandese.
- 6.1.3** Qualche indiano non è greco.
- 6.1.4** Nessun francese è invidioso, tranne i guasconi.
- 6.1.5** Se Menelao è felice, allora tutti i greci lo invidiano.
- 6.1.6** Menard è francese e invidia qualche greco.
- 6.1.7** Ci sono almeno due francesi.
- 6.1.8** Almeno due francesi si insultano (tra loro).
- 6.1.9** C'è esattamente un greco.
- 6.1.10** Esattamente un greco è invidioso.

7 Soluzioni degli esercizi

1.1.1 $\vdash (P \vee (Q \wedge R \rightarrow Q)) \vee \neg(P \vee (Q \wedge R \rightarrow Q))$

(1) $(P \vee (Q \wedge R \rightarrow Q)) \vee \neg(P \vee (Q \wedge R \rightarrow Q))$ IT(S) 44 (o terzo escluso)

1.1.2 $\neg(Q \wedge P) \vee \neg P \vdash \neg P \vee \neg Q$

1	(1)	$\neg(Q \wedge P) \vee \neg P$	A
2	(2)	$\neg(Q \wedge P)$	A
2	(3)	$\neg Q \vee \neg P$	2 IS(S) 1.5.1(g) (o de Morgan)
4	(4)	$\neg P$	A
4	(5)	$\neg Q \vee \neg P$	4 IV
1	(6)	$\neg Q \vee \neg P$	1, 2, 3, 4, 5 EV
1	(7)	$\neg P \vee \neg Q$	6 IS(S) 19 (o commutatività di $\vee$)

1.1.3 $(P \wedge Q) \wedge ((P \rightarrow Q) \vee R) \vdash ((P \wedge Q) \wedge (P \rightarrow Q)) \vee ((P \wedge Q) \wedge R)$

1	(1)	$(P \wedge Q) \wedge ((P \rightarrow Q) \vee R)$	A
1	(2)	$((P \wedge Q) \wedge (P \rightarrow Q)) \vee ((P \wedge Q) \wedge R)$	1 IS(S) 1.5.1(c) (o distributività di $\wedge$ su $\vee$)

2.1 Dobbiamo dimostrare che (a) se A è una lettera enunciativa allora A non termina con ‘(’. Questo è ovvio, perché in nessuna lettera enunciativa ricorrono parentesi. Poi bisogna dimostrare che (b) se nessuna delle due fbf A e B termina con ‘(’, allora nemmeno $\neg A$, $(A \rightarrow B)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ e $(A \leftrightarrow B)$ terminano con ‘(’. Iniziamo con il $\neg A$. Assumiamo che A non termini con ‘(’. Ma in tal caso nemmeno $\neg A$, dato che A e $\neg A$ terminano nello stesso modo. Consideriamo ora tutti gli altri casi, ossia $(A \rightarrow B)$, $(A \wedge B)$ ecc. Questi casi sono facili, perché tutte quelle fbf terminano con ‘)’ e dunque *non* terminano con ‘(’. Per il principio di induzione, possiamo concludere che in tutte le fbf occorre un numero pari di parentesi.

2.2 Dobbiamo dimostrare che (a) se A è una lettera enunciativa allora A è tale che vi occorre un numero pari di parentesi. Questo è ovvio, perché in ogni lettera enunciativa occorrono 0 parentesi, e 0 è pari. Poi bisogna dimostrare che (b) se ciascuna delle due fbf A e B è tale che vi occorre un numero pari di parentesi, allora anche in $\neg A$, $(A \rightarrow B)$, $(A \wedge B)$ ecc. occorre un numero pari di parentesi. Iniziamo da $\neg A$, assumendo che in A occorra un numero pari di parentesi. Poiché in $\neg A$ occorrono tante parentesi quante in A, possiamo concluderne che anche in $\neg A$ occorre un numero pari di parentesi. Consideriamo ora tutti gli altri casi, ossia $(A \rightarrow B)$, $(A \wedge B)$ ecc. Assumiamo che in A e B occorra un numero pari di parentesi. Ma in $(A \rightarrow B)$, $(A \wedge B)$ ecc. occorre un numero di parentesi che è uguale a 2 più il numero delle parentesi che occorrono in A più il numero delle parentesi che occorrono in B. Poiché la somma di due numeri pari è a sua volta pari, anche in tutti questi casi il numero delle parentesi è pari. Per il principio di induzione, possiamo concludere che in tutte le fbf occorre un numero pari di parentesi.

3.1.1 $P \leftrightarrow -P$ è incoerente:

P	$P \leftrightarrow -P$
V	F
F	F

3.1.2 $P \wedge -Q \rightarrow P$ è tautologica:

P	Q	$P \wedge -Q \rightarrow P$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	V

3.1.3 $P \vee Q \rightarrow P$ è contingente:

P	Q	$P \vee Q \rightarrow P$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

3.1.4 $P \rightarrow (Q \rightarrow (R \rightarrow P))$ è tautologica:

P	Q	R	$P \rightarrow (Q \rightarrow (R \rightarrow P))$
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V
F	F	F	V

4.1 Le sequenze sono tutte tautologiche.

5.3 Innanzitutto si dimostra per induzione sulle sequenze che tutte le sequenze derivabili sono tautologiche. Si deve dimostrare che (a) tutte le sequenze $A \vdash A$ sono tautologiche e (b) che (i) se le sequenze $X \vdash A \rightarrow B$ e $Y \vdash A$ sono tautologiche allora $X, Y \vdash B$ è tautologica (MPP); (ii) se le sequenze $X \vdash A \rightarrow B$ e $Y \vdash -B$ sono tautologiche allora $X, Y \vdash -A$ è tautologica (MTT), e così via per tutte le regole del calcolo. Una volta dimostrato questo, si è anche dimostrato che i teoremi (ossia le sequenze con un insieme vuoto di premesse) sono sequenze tautologiche. Ma una sequenza tautologica con un insieme vuoto di premesse è una tautologia. Poiché nessuna tautologia è una contraddizione, si conclude che nessun teorema è una contraddizione, ossia che il calcolo è coerente.

5.4 Il lemma dice che, data una qualunque fbf A , per ogni assegnazione di valore di verità alle lettere enunciative $L_1, \dots, L_n$ che occorrono in A , se A è vera in quell'assegnazione allora è derivabile

$$W_1, \dots, W_n \vdash A$$

altrimenti è derivabile

$$W_1, \dots, W_n \vdash \neg A$$

dove $W_1, \dots, W_n$ sono le lettere enunciative $L_1, \dots, L_n$ che occorrono affermate o negate secondo che siano vere o false in quell'assegnazione.

6.1.1 $(x)(Fx \rightarrow Fx \vee Gx)$

6.1.2 $(x)(Fx \rightarrow \neg(Gx \wedge Ix))$

6.1.3 $(\exists x)(Ix \wedge \neg Gx)$

6.1.4 $(x)((Fx \wedge \neg Gx) \rightarrow Ix)$

6.1.5 $Fm \rightarrow (x)(Gx \rightarrow Ixm)$

6.1.6 $Fm \wedge (\exists x)(Gx \wedge Ixm)$

6.1.7 $(\exists x)(\exists y)((Fx \wedge Fy) \wedge x \neq y)$

6.1.7 $(\exists x)(\exists y)(Fx \wedge Fy \wedge x \neq y \wedge Ixm \wedge Iym)^{12}$

6.1.9 $(\exists x)(Gx \wedge (y)(Gy \rightarrow y = x))$

6.1.10 $(\exists x)((Gx \wedge Ix) \wedge (y)(Gy \wedge Iy \rightarrow y = x))$

¹²Qui alcune parentesi sono state omesse per facilitare la lettura.