TUTORAGGIO ANALISI II

a.a 2012/2013

dott.ssa Saoncella S.

LEZIONE DEL 21/11/2012

DEFINIZIONE: Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$, $r: I \to \mathbb{R}^d$ una parametrizzazione di una curva regolare γ. Sia $\mu: r(I) \to [0,+\infty[$ una funzione. Se la massa della curva γ è data da

$$\text{massa}(\gamma) := \int_I \mu(r(t))|r'(t)|\,dt \neq 0$$

si definisce il baricentro della curva r di densità μ il punto:

$$\vec{G} := \frac{\int_I r(t)\mu(r(t))|r'(t)|\,dt}{\text{massa}(\gamma)}$$

ALCUNI CASI PARTICOLARI

(1) supponiamo la dimensione $d=2$. Allora si ha $r(t) = (x(t), y(t))$ quindi

$$\vec{G} := \left(\frac{\int_I x(t)\mu(x(t),y(t))\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\,dt}{\text{massa}(\gamma)}, \frac{\int_I y(t)\mu(x(t),y(t))\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\,dt}{\text{massa}(\gamma)} \right)$$

(2) supponiamo $d=2$ e $\mu = \text{cost}$. In tal caso si ha

$$\text{massa}(\gamma) = \mu \int_I |r'(t)|\,dt = \mu \,\text{lunghezza}(\gamma)$$

e quindi

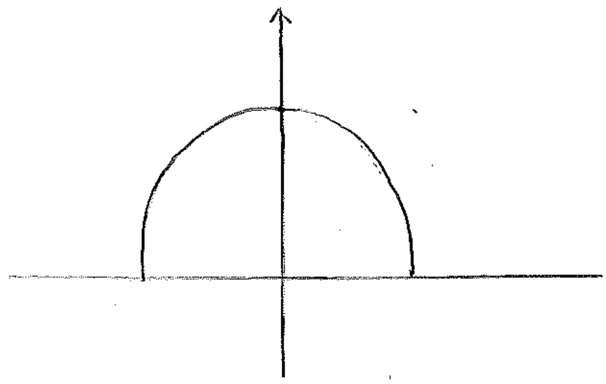
$$\vec{G} := \frac{1}{\text{lunghezza}(\gamma)} \left(\int_I x(t)\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\,dt, \int_I y(t)\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\,dt \right).$$

ESERCIZIO 1

Calcolare il baricentro dell'arco di circonferenza avente raggio unitario e centro l'origine giacente nel semipiano $y \geq 0$ e avente densità costante pari a $\mu > 0$.

SOLUZIONE

Graficamente abbiamo la seguente situazione



Parametrizziamo la curva γ tramite le coordinate polari, quindi

$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases} \quad \text{con } t \in [0, \pi].$$

La densità è costante, mentre la lunghezza della curva è π. Quindi le coordinate del baricentro sono

$$G_x = \frac{1}{\pi} \int_I x(t) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos t \, dt = 0$$

$$G_y = \frac{1}{\pi} \int_I y(t) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin t \, dt = \frac{1}{\pi} \Big[-\cos t \Big]_0^\pi = \frac{1}{\pi} [1 + 1] = \frac{2}{\pi}$$

Pertanto $\vec{G} = (0, 2/\pi)$.

Esercizio 2

Si calcoli il baricentro dell'arco γ di curva parametrizzata da $r(t)=(t^2,2t)$ con $t\in[0,1]$ e densità costante pari a μ_0.

Soluzione

Iniziamo con il calcolare la lunghezza di γ. Si ha che

$$\text{lunghezza}(\gamma)=\int_0^1\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\,dt=\int_0^1\sqrt{(2t)^2+2^2}\,dt=2\int_0^1\sqrt{1+t^2}\,dt$$

calcoliamo a parte il seguente integrale, dove $a\in\mathbb{R}$.

$$\int\sqrt{a+t^2}\,dt=t\sqrt{a+t^2}-\int\frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}\,dt=t\sqrt{a+t^2}-\int\frac{a+t^2-a}{\sqrt{a+t^2}}\,dt=$$

$$=t\sqrt{a+t^2}-\int\sqrt{a+t^2}\,dt+a\int\frac{dt}{\sqrt{a+t^2}}$$

Ora poniamo $\sqrt{a+t^2}=-t+w$ da cui $t=\frac{w^2-a}{2w}$ e $dt=\frac{w^2+a}{2w^2}$ quindi l'ultimo integrale diventa

$$\int\frac{dt}{\sqrt{a+t^2}}=\int\frac{2w}{w^2+a}\cdot\frac{w^2+a}{2w^2}\,dw=\int\frac{1}{w}\,dw=\log|w|+c=$$

$$=\log|t+\sqrt{a+t^2}|+c$$

Quindi l'integrale che stavamo calcolando diventa

$$\int\sqrt{a+t^2}\,dt=t\sqrt{a+t^2}-\int\sqrt{a+t^2}\,dt+a\log|t+\sqrt{a+t^2}|+c$$

da cui si ricava che

$$\int\sqrt{a+t^2}\,dt=\frac{1}{2}\left(t\sqrt{a+t^2}+a\log|t+\sqrt{a+t^2}|+c\right)$$

Quindi abbiamo che per $\alpha=1$

$$\text{lunghezza}(\gamma)=2\int_0^1 \sqrt{1+t^2}\,dt=\frac{2}{2}\left[t\sqrt{1+t^2}+\log\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|\right]_0^1=$$

$$=\left[\sqrt{2}+\log|1+\sqrt{2}|-0\right]=\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})\equiv L$$

Passiamo ora al calcolo della prima coordinata del baricentro:

$$G_x=\frac{1}{L}\int_0^1 t^2\sqrt{1+t^2}\,dt$$

posto $s=t^2$, da cui si ricava $t=\sqrt{s}$ e $dt=\frac{ds}{2\sqrt{s}}$
l'integrale diventa

$$\int_0^1 s\sqrt{(1+s)}\,\frac{ds}{2\sqrt{s}}=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{s(1+s)}\,ds=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{\left(s^2+s+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}}\,ds=$$

$w=2s+1 \quad dw=2ds$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\,ds=\frac{1}{4}\int_0^1\sqrt{(2s+1)^2-1}\,ds=\frac{1}{8}\int_1^3\sqrt{w^2-1}\,dw=$$

preso $\alpha=-1$

$$=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}\left(w\sqrt{w^2-1}-\log\left(w+\sqrt{w^2-1}\right)\right)\right]_1^3=\frac{1}{16}\left(3\sqrt{8}-\log(3+\sqrt{8})-0\right)=$$

$$=\frac{1}{16}\left(3\sqrt{8}-\log(3+\sqrt{8})\right).$$

Quindi

$$G_x=\frac{1}{16L}\left(3\sqrt{8}-\log(3+\sqrt{8})\right)$$

Procediamo ora con il calcolo della seconda coordinata del baricentro. Si ha che

$$G_y = \frac{1}{L}\int_0^1 2t\sqrt{1+t^2}\,dt$$

quindi posto $s=t^2$ l'integrale diventa

$$\int_0^1 (1+s)^{1/2}\,ds = \frac{2}{3}\Big[(1+s)^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{2}{3}\left(2^{3/2}-1\right) = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

Quindi abbiamo che

$$G_y = \frac{1}{L}\cdot\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

Esercizio 3

Si consideri la spirale γ di equazioni polare $\rho(\vartheta)=3\vartheta$ dove $\vartheta\in[0,5\pi]$.

(1) Si calcoli la lunghezza di γ

(2) Supposta la spirale ricavata da una lamina di materiale con densità $\mu:\mathbb{R}^2\to[0,+\infty[$ tale che $\mu(x,y)=6(x^2+y^2)$, si calcoli la massa totale di γ.

Soluzione

1) La curva è espressa in coordinate polari. Quindi abbiamo che la lunghezza è data da

$$\text{lunghezza}(\gamma) = \int_0^{5\pi}\sqrt{\rho^2(\vartheta)+\rho'^2(\vartheta)}\,d\vartheta = \int_0^{5\pi}\sqrt{9\vartheta^2+9}\,d\vartheta =$$

$$= \int_0^{5\pi} 3\sqrt{1+\vartheta^2}\,d\vartheta = \frac{3}{2}\left[\vartheta\sqrt{1+\vartheta^2}+\log\left|\vartheta+\sqrt{1+\vartheta^2}\right|\right]_0^{5\pi} =$$

$$= \frac{3}{2}\left(5\pi\sqrt{1+25\pi^2} + \log\left(5\pi+\sqrt{1+25\pi^2}\right)\right)$$

(3) Abbiamo che la densità è pari a $\mu(x,y) = 6(x^2+y^2)$ che espresso in coordinate polari diventa

$$\mu(x(\vartheta), y(\vartheta)) = \mu(\rho(\vartheta)\cos\vartheta, \rho(\vartheta)\sin\vartheta) = 6\rho^2(\vartheta) = 54\vartheta^2$$

La massa totale della curva è pertanto

$$\text{massa}\ \gamma = \int_0^{5\pi} \mu(x(\vartheta), y(\vartheta))\sqrt{\rho^2(\vartheta)+\dot{\rho}^2(\vartheta)}\,d\vartheta$$

$$= \int_0^{5\pi} 54\vartheta^2 \cdot 3\sqrt{1+\vartheta^2}\,d\vartheta = \int_0^{5\pi} 162\,\vartheta^2\sqrt{1+\vartheta^2}\,d\vartheta$$

Ora sfruttando i calcoli fatti in precedenza

$$\text{massa}\ \gamma = \frac{162}{16}\left[w\sqrt{w^2-1} - \log\left(w+\sqrt{w^2-1}\right)\right]_1^{50\pi^2+1} =$$

$$= \frac{81}{8}\left[(50\pi^2+1)\sqrt{(50\pi^2+1)^2-1} - \log\left(50\pi^2+1+\sqrt{(50\pi^2+1)^2-1}\right)\right]$$

tenendo conto che con i vari cambi di variabile si è posto $w = 2\vartheta^2+1$. Infatti da $s = \vartheta^2$ e $w = 2s+1$ si ricava proprio che $w = 2\vartheta^2+1$.