Calcolo Numerico
Corso di Laurea in Informatica
Preappello del 25/06/2014 (durata due ore) – Tema 1

MAT.	COGNOME	NOME

QUESITI A RISPOSTA CHIUSA

Per ogni quesito, indicare la casella che ha la miglior risposta. Ogni risposta corretta vale 1 punto, errata o non data 0 punti.

1. Il massimo numero macchina positivo del sistema floating point $\mathbb{F}(10, 2, -1, 3)$ è

   ☐ 90 ☐ 99 ☐ 990 ☐ 1000

2. Il metodo di bisezione viene utilizzato per approssimare la radice $\xi \in [a_0,\ b_0]$ dell'equazione $f(x) = 0$. Ricordando che $x_k = (a_k + b_k)/2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ e che l'errore della k-esima iterata è $e_k = \xi - x_k$, il metodo di bisezione verifica ad ogni passo la disequazione $|e_{k+1}| < |e_k|$

   ☐ vero ☐ falso

3. La radice $\xi = 1$ di ognuna delle due equazioni

   $$\text{(a)}\quad \ln^2(x) = 0, \qquad \text{(b)}\quad (x-1)\ln(x) = 0$$

   viene approssimata con il metodo di Newton partendo da $x_0 = 1.5$. Si può dire che

   ☐ Newton applicato ad (a) non converge mentre vi converge se applicato a (b)
   ☐ il metodo di Newton per (a) ha ordine 2 e per (b) ha ordine 1
   ☐ il metodo di Newton per (a) ha ordine 1 e per (b) ha ordine 2
   ☐ i grafici di $\log_{10}|e_k|$ sia per (a) che per (b) sono lineari

4. Sia $f(x) = 4 - x^2$. La successione x_k, $k = 0, 1, \ldots$ generata dal metodo di Newton partendo da $x_0 = 1$ è

   ☐ convergente a $\xi = 2$ ☐ convergente a $\xi = -2$ ☐ divergente a $+\infty$

   ☐ nessuna delle risposte date è corretta

5. Un metodo iterativo produce le seguenti iterate

```
k        x(k)
2   2.25000000000000e+000
3   2.12500000000000e+000
4   2.06250000000000e+000
5   2.03125000000000e+000
6   2.01562500000000e+000
7   2.00781250000000e+000
8   2.00390625000000e+000
9   2.00195312500000e+000
```

   Allora, una stima ragionevole della costante asintotica dell'errore è

   ☐ 0.5
   ☐ 1.0
   ☐ $2.6 \cdot 10^5$
   ☐ non si può calcolare

6. Lo zero $\xi = 1$ della funzione $f(x) = x^2 - 1$ è approssimato mediante il medodo della secante variabile partendo da $x_0 = 3$ e $x_1 = 2$. L'iterata x_2 vale ☐ 1.0 ☐ 1.2 ☐ 1.4 ☐ 1.6

7. Determinare il minimo valore di k richiesto al metodo iterativo di Jacobi per approssimare la soluzione $\mathbf{x}$ del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $||\mathbf{x}_k - \mathbf{x}||_2 < 10^{-6}$ partendo da $\mathbf{x}_0 = (1, 1, 1)^T$ essendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

☐ 1 ☐ 10^2 ☐ 10^4 ☐ 10^6

8. Siano

$$L_i^{(n)}(x) = \frac{\prod_{r=0, r\neq i}^{n}(x - x_r)}{\prod_{r=0, r\neq i}^{n}(x_i - x_r)}, \quad i = 0, \ldots, n$$

gli $n+1$ polinomi di Lagrange associati ai nodi x_i, $i = 0, \cdots, n$. Allora il polinomio P definito dall'espressione

$$P(x) = \left(1 + \sum_{i=0}^{n} L_i^{(n)}(x) \right)^2$$

☐ è $P(x) = 0$ ☐ è $P(x) = 1$ ☐ è $P(x) = 4$ ☐ dipende dai nodi x_i

9. Siano dati la funzione $f(x) = \sin(x)$ ed i nodi equispaziati $x_k = x_0 + k \cdot h$, $k = 0, \ldots, 4$ con $x_0 = 0$ e $h = \pi/2$. Allora, la quantità q data da

$$q = f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] + f[x_0, x_1, x_2] - f[x_4, x_3, x_2, x_1, x_0]$$

è pari a ☐ 0 ☐ $-\frac{4}{\pi^2}$ ☐ $-\frac{8}{\pi^2}$ ☐ nessuna delle precedenti risposte

10. Il metodo di Cavalieri-Simpson composto con m intervalli viene usato per approssimare l'integrale

$$I = \int_{-1}^{1} \left(4x^3 - 3x^2 + 2x \right) dx$$

con un errore assoluto inferiore a 10^{-6}. Il più piccolo valore di m che assicura la richiesta è (ricordarsi che in ognuno degli m intervalli viene applicata Cavalieri-Simpson)

☐ 1 ☐ 4 ☐ 16 ☐ 256

11. Cosa troviamo nel WorkSpace di Matlab al termine delle seguenti due istruzioni?

```
x = [1 2 3];
v = x'*x;
```

☐ un vettore
☐ una matrice di ordine 3 ed un vettore colonna
☐ una matrice di ordine 3
☐ una matrice di ordine 3 ed un vettore riga

12. L'istruzione Matlab

```
(1:3:6).*(0:2)
```

produce ☐ un errore ☐ [0 3 10] ☐ 13 ☐ una matrice 3×2

13. Le istruzioni Matlab

```
A = zeros(3);
A(3,1) = length( size(A) );
```

producono

☐ un errore ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

14. Le istruzioni Matlab

```
    f = inline('0.11*x');
    a = 100;
    while( a > 10 )
        a = f(a)
end
```

stampano a video

☐ 11 e 1
☐ 11 e 1.21
☐ $f(a)$ e $f(a)$
☐ nessuna delle risposte precedenti è corretta

15. Indicare quali delle seguenti istruzioni Matlab utilizzate per definire una function di nome pluto è corretta, barrando la casella OK e quale non lo è barrando la casella NO

☐ OK ☐ NO function [z] = pluto(x,y)
☐ OK ☐ NO function z = pluto(x,y)
☐ OK ☐ NO function [x,y,z] = pluto(x,y)
☐ OK ☐ NO function pluto(x)

DOMANDA TEORICA (max 3 punti)

Si devono risolvere $m \gg 1$ sistemi lineari del tipo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_k$, $k = 1, \ldots, m$ con A matrice quadrata di ordine n. Dimostrare come la fattorizzazione LU della matrice A (ossia, $A = L \cdot U$) può essere utilizzata per risolvere vantaggiosamente gli m sistemi lineari e fornire una stima del numero di operazioni aritmetiche necessarie.

Esercizi

Rispondere in modo sintetico ed esauriente nello spazio sottostante ciascun esercizio.

Esercizio 1 (5 punti) Si consideri il metodo iterativo di punto fisso $x_{k+1} = \sqrt{x_k + 2}$, $k = 0, 1, \ldots$.

(a) Calcolare gli eventuali punti fissi del metodo.

Sia ora x_k la successione generata partendo da $x_0 = 7$.

(b) Calcolare x_1 ed x_2. Dire se la successione x_k è convergente e, in caso affermativo, a quale valore ξ converge. La successione x_k è monotona? Se sì, di che tipo?

(b) Calcolare, se possibile,

$$\lim_{k \to +\infty} \left| \frac{\sqrt{x_{k+1} + 2} - 2}{\sqrt{x_k + 2} - 2} \right|$$

Esercizio 2 (4 punti) Calcolare la fattorizzazione LU della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ed utilizzarla per calcolare il determinante di A^{-1}.

Esercizio 3 (6 punti) Si consideri la seguente tabella di dati sperimentali relativa ai punti $P_k = (x_k, y_k)$, $k = 1, \ldots, 5$

k	1	2	3	4	5
x_k	-2	-1	0	1	2
y_k	-1	0	1	1	3

(a) Calcolare il polinomio di approssimazione ai minimi quadrati di grado $n = 1$ (retta di regressione) che minimizza la somma degli scarti verticali.

(b) Calcolare il baricentro $G = (x_G, y_G)$ dei punti P_k e verificare che la retta di regressione passa per G.

(c) Assumendo ora $y_k = f(x_k)$ per una qualche funzione f non nota, fornire, utilizzando le informazioni dell'esercizio, una stima ragionevole dell'integrale

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx$$