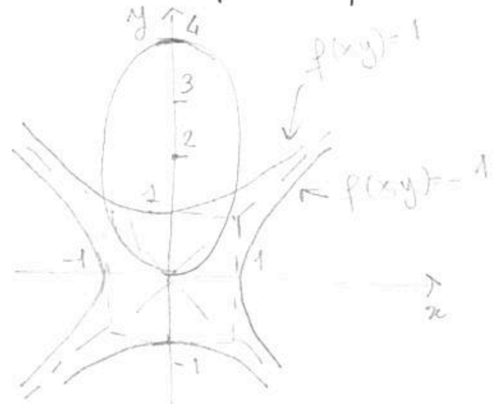
Ex 1 pag 13 Analisi Matematica II 24 luglio 2015

Sia data la funzione $f(x,y)=y^2-x^2$ e la curva di equazione $g(x,y)=x^2+\frac{(y-2)^2}{4}-1=0$

a) Rappresentare sul piano cartesiano la curva vincolo e le curve di livello della funzione f di equazione $f(x,y)=1$ e $f(x,y)=-1$



$$L(x,y,\lambda)=y^2-x^2-\lambda\left[x^2+\frac{(y-2)^2}{4}-1\right]$$

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda)=-2x-2\lambda x=0 \\ L'_y(x,y,\lambda)=2y-\frac{1}{2}\lambda(y-2)=0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda)=-\left[x^2+\frac{(y-2)^2}{4}-1\right]=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x(1+\lambda)=0 & (1) \\ 2y-\frac{1}{2}\lambda y+\lambda=0 & (2) \\ x^2+\frac{(y-2)^2}{4}=1 & (3) \end{cases}$$

Da (1) $x=0$ oppure $\lambda=-1$

$x=0$ in (3) $\frac{(y-2)^2}{4}=1$ $\quad (y-2)^2=4,\quad y-2=\pm 2 \begin{cases} y=0 & \lambda=0 & A(0,0) \\ y=4 & \lambda=8 & B(0,4) \end{cases}$

$\lambda=-1$ in (2) $\quad 2y+\frac{1}{2}y=1 \qquad y=\frac{2}{5}$

in (3) $x^2+\frac{64}{25}\cdot\frac{1}{4}=1 \qquad x^2=\frac{9}{25} \qquad x=\pm\frac{3}{5} \qquad C(3/5,2/5)\ \lambda=-1,\ D(-3/5,2/5)\ \lambda=-1$

$$|\tilde{H}(x,y,\lambda)|=\begin{vmatrix} 0 & 2x & \frac{1}{2}(y-2) \\ 2x & -2-2\lambda & 0 \\ \frac{1}{2}(y-2) & 0 & 2-\frac{1}{2}\lambda \end{vmatrix}=\frac{1}{2}(y-2)^2(1+\lambda)-4x^2\left(2-\frac{1}{2}\lambda\right)$$

$|\tilde{H}(0,0,0)|=\frac{1}{2}\cdot 4=2>0 \qquad |\tilde{H}(0,4,8)|=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 9=18>0$

$|\tilde{H}(3/5,2/5,-1)|=-4\cdot\frac{9}{25}\cdot\frac{5}{2}=-\frac{18}{5}<0 \qquad |\tilde{H}(-3/5,2/5,-1)|=-4\cdot\frac{9}{25}\cdot\frac{5}{2}=-\frac{18}{5}<0$

A (0,0) punto di max relativo vincolato

B (0,4) punto di max relativo vincolato

C (3/5, 2/5) punto di min relativo vincolato

D (-3/5, 2/5) punto di min relativo vincolato

Teorema di Weierstrass

"Ogni funzione continua definita in un insieme chiuso e limitato ammette massimo e minimo assoluti".

La funzione f è continua, la curva vincolo è chiusa e limitata $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ max e min assoluti

$f(A)=f(0,0)=0 \qquad f(B)=f(0,4)=16$

$f(C)=f(3/5,2/5)=f(D)=f(-3/5,2/5)=-\frac{1}{5}$

B (0,4) punto di max assoluto vincolato

C (3/5, 2/5) D (-3/5, 2/5) punti di minimo assoluto vincolato

Analisi Matematica II 24 luglio 2013

EX 2 fila B

i) Sia $y = y(x)$ implicitamente definita da $y(0) = 1$ e

$$e^{xy} + y^2 - x - 2 - 9x^2 = 0$$

Verificare che siano soddisfatte le ipotesi del teorema di Dini.

ii) Calcolare $\lim_{x \to 0} \frac{y(x)}{x^2}$.

Ris

Sia $f(x,y) = e^{xy} + y^2 - x - 2 - 9x^2$

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$f(0,1) = e^0 + 1 - 0 - 2 - 0 = 1 + 1 - 2 = 0$

$f_y(x,y) = x e^{xy} + 2y$ $\qquad f_y(0,1) = 0 + 2 \neq 0$

Sono verificate le ip del teorema di Dini $\Rightarrow$

$\exists!$ funzione $y = y(x)$ definita implicitamente da $f(x,y) = 0$ in un intorno U di 0 tc $y(0) = 1$, tale funzione è derivabile infinite volte in U.

In particolare y è continua in $U \Rightarrow \lim_{x \to 0} y(x) = y(0) = 1 > 0$

Essendo $x^2 \geq 0$, $\lim_{x \to 0} x^2 = 0^+$

Allora $\lim_{x \to 0} \frac{y(x)}{x^2} = +\infty$.

Analisi Matematica II 24 luglio 2013

EX3 fila B

i) Definire un campo vettoriale conservativo

ii) Enunciare i teoremi sulle condizioni sufficienti e sulle condizioni necessarie e sufficienti affinché un c.v. sia conservativo

iii) Determinare tutte le eventuali primitive in $\mathbb{R}^2$ di $F(x,y) = (\underbrace{y^2}_{F_1}, \underbrace{2xy}_{F_2})$.

Ris

Def Un campo vettoriale $F: A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ si dice conservativo in A se $\exists$ una funzione $g: A \to \mathbb{R}$ detta potenziale $g \in C^1(A)$ t.c. $\nabla g = F$

Proposizione Sia A aperto e connesso e $F \in C^0(A, \mathbb{R}^3)$ allora STE

1. F ha primitive in A (essendo $n=3$, F è conservativo)
2. $\oint_\gamma F = 0$ $\forall \gamma$ chiusa e regolare a tratti contenuta in A
3) $\int_{\gamma_1} F = \int_{\gamma_2} F$ per ogni coppia di curve regolari a tratti γ_1 e γ_2 contenute in A ed aventi stesso punto iniziale e stesso punto finale.

Proposizione

$$\left.\begin{array}{l} F \in C^1(A, \mathbb{R}^3) \\ F \text{ aperto stellato} \\ F \text{ chiuso} \end{array}\right| \Rightarrow F \text{ conservativo in } A$$

Teorema

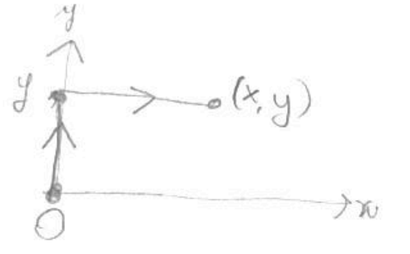
$$\left.\begin{array}{l} F \in C^1(A, \mathbb{R}^n) \\ A \text{ aperto semplicemente connesso} \\ F \text{ chiuso} \end{array}\right| \Rightarrow F \text{ conservativo in } A$$

Sia $F(x,y) = (y^2, 2xy)$. $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $\mathbb{R}^2$ aperto semplicemente connesso

$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial y^2}{\partial y} = 2y = \frac{\partial}{\partial x} 2xy = \frac{\partial}{\partial x} F_2 \Rightarrow F$ è chiuso in A

$\Rightarrow F$ ha primitive in A

Una primitiva è data da



$$g(x,y) = \int_0^y F_2(0,t)\,dt + \int_0^x F_1(t,y)\,dt = \int_0^x y^2\,dt = y^2 x$$

Verifica: $g_x = y^2$ $\quad g_y = 2xy \Rightarrow \nabla g = F$ ok.

Essendo $\mathbb{R}^2$ connesso, tutte le primitive di F sono date da

$$y^2 x + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$