Prof. Lidia Angeleri, Prof. Francesca Mantese
Università di Verona, 2012/2013
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Esercizi per il Corso di ALGEBRA

Foglio 10
12 dicembre 2012

1. Siano $K = \mathbb{Q}$, $F = \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$ e $\alpha = \sqrt[4]{2}$.
   (a) Si mostri che $K \subset F$ è un'estensione di Galois verificando che F è campo di riducibilità completa di un polinomio separabile su K.
   (b) Si verifichi che $[K(\alpha) : K] = 4$ e $[F : K] = 8$.
   (c) Si considerino i campi intermedi $K(\alpha)$ e $K(i)$. Si dimostri che esistono $\sigma, \tau \in \mathrm{Gal}(F/K)$ tali che $\sigma(i) = i$, $\sigma(\alpha) = i\alpha$, e $\tau(\alpha) = \alpha$, $\tau(i) = -i$.
   (d) Si dimostri $\sigma^4 = 1 = \tau^2$ e $\tau\sigma = \sigma^3\tau$.
   (e) Si determinino tutti gli elementi di $\mathrm{Gal}(F/K)$.
   (f) Si determinino tutti i sottogruppi di $\mathrm{Gal}(F/K)$.

   (*10 punti*)

2. Si decida se i seguenti enunciati su un'estensione di Galois $K \subset F$ sono veri o falsi (motivando la risposta):
   (a) $[F : K] = p$ per un numero primo p se e solo se $\mathrm{Gal}(F/K)$ è un gruppo ciclico.
   (b) Se $[F : K] = 4$ e $K \subset L \subset F$ è un campo intermedio, allora $K \subset L$ è un'estensione di Galois.
   (c) Se K un campo di caratteristica $\neq 2$, allora ogni estensione $K \subset F$ di grado 2 è un'estensione di Galois.
   (d) Se $F = \mathbb{Q}(i, \sqrt{7})$, allora $\mathrm{Gal}(F/\,\mathbb{Q}(\sqrt{7}))$ è sottogruppo normale di $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$.

   (*8 punti*)

3. Sia F il campo di riducibilità completa del polinomio $f = x^3 - 7$ su $\mathbb{Q}$.
   (a) Si dimostri che $G = \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}) \cong S_3$.
   (b) Si determinino un elemento primitivo α di $\mathbb{Q} \subset F$ e il suo polinomio minimo su $\mathbb{Q}$.
   (c) Si determini il gruppo di Galois $H = \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}_3)$, dove $\mathbb{Q}_3$ è il campo di riducibilità completa del polinomio $g = x^3 - 1$ su $\mathbb{Q}$. È un sottogruppo normale di G?

   (*8 punti*)

4. Sia $K \subset F$ un'estensione di Galois con gruppo di Galois $G = \mathrm{Gal}(F/K) = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$. Siano inoltre $\alpha \in F$ e $f \in K[x]$ il polinomio minimo di α su K.

   Si dimostri
   $$(x - \varphi_1(\alpha)) \cdot \ldots \cdot (x - \varphi_n(\alpha)) = f^t \quad \text{dove} \quad t = [F : K(\alpha)]$$

   (*6 punti*)

Consegna: mercoledì 19 dicembre durante la lezione.