Calcolo numerico I e laboratorio, a.a. 2016/2017

Giacomo Albi
giacomo.albi@univr.it

Questo note rappresentano un complemento alle lezioni in classe, e non hanno alcuna pretesa di essere esaustive, o sostitutive agli appunti presi durante la lezione, o ad uno dei libri di testo suggeriti.
Raccoglieró le definizioni base e i concetti fondamentali, che ricorreranno durante il corso.
Se sono presenti inconsistenze o errori siete pregati di segnalarmeli.

In quanto segue gli argomenti del corso:

0. Teoria degli errori e efficienza degli algoritmi.
1. Zeri di funzione.
2. Sistemi lineari.
3. Autovalori e autovettori.
4. Interpolazione ed approssimazione.
5. Integrazione numerica.

Libri di testo suggeriti:

1. A. Quarteroni, F. Saleri, Calcolo Scientifico, Esercizi e problemi risolti con MATLAB e OCTAVE, Springer, 2008.
2. S. De Marchi, Appunti di Calcolo Numerico con codicil in MATLAB/OCTAVE, Esculapio, 2011.
3. E. Süli, D. F. Mayers, An Introduction to Numerical Analysis, Cambridge University Press, 2003.
4. J. Stoer, R. Bulrish, Introduction to numerical analysis, Springer, 1993.

Diario lezioni

`Lez.(2h), 15.03.`
Introduzione generale. Zeri di funzione. metodo della bisezione. Convergenza e ordine del metodo.

`Lab.(2h), 17.03.`
Introduzione all'ambiente MATLAB/OCTAVE. Metodo della bisezione.

`Lez.(3h), 22.03.`
Metodo della bisezione. Metodo delle secanti & regula-falsi. Metodo di Newton. Esercizi.

`Lab.(2h), 24.03.`
Metodo della bisezione. Metodo delle secanti. Esempi.

`Lez.(3h), 29.03.`
Convergenza locale vs globale. Teoremi di convergenza globale. Formula di Erone generalizzata. Criteri di arresto. Teorema di rappresentazione in base.

`Lab.(2h), 31.03.`
Convergenza di Newton, bisezione e secanti. Criteri di arresto. Numeri macchina.

Contents

1 Zeri di funzione

Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continua nell'intervallo $I = [a, b]$, $f \in C^0(I)$, vogliamo trovare un numero reale $\xi \in [a, b]$ tale che $f(\xi) = 0$. Se tale numero esiste, allora è detto soluzione dell'equazione

$$f(x) = 0. \tag{1.1}$$

Teorema 1.1 (Teorema degli zeri)**.** *Sia $f \in C^0([a, b])$ e tale che $f(a)f(b) \leq 0$, allora esiste $\xi \in [a, b]$ tale che $f(\xi) = 0$.*

Proof. Se $f(a) = 0$ o $f(b) = 0$, allora $\xi = a$ o $\xi = b$. Consideriamo il caso in cui $f(a)f(b) \neq 0$, allora $f(a)f(b) < 0$; in altre parole 0 è contenuto nell'intervallo con estermità $f(a)$ e $f(b)$. Per il Teorema dei valori intermedi, (vedi Teorema A.1), allora esiste ξ nell'intervallo aperto (a, b) tale che $f(\xi) = 0$. □

Analiziamo tre metodi iterativi per il calcolo delle soluzioni di equazioni non lineari. In particolare confronteremo i metodi in base a convergenza, e costo.

1.1 Metodo della bisezione

Consideriamo una funzione f continua a valori reali su un certo intervallo $I \subset \mathbb{R}$ e tale che $f(\xi) = 0$ per $\xi \in I$, un semplice metodo iterativo per trovare una soluzione dell'equazione non lineare $f(x) = 0$ si basa sul concetto di intervallo separatore, ovvero di un intervallo $[a_0, b_0] \subset \mathbb{R}$ per il quale é possibile verificare che $\xi \in [a_0, b_0]$.

Il *metodo della bisezione* consiste nel trovare una soluzione per (1.1) andando a definire una sequenza di intervalli separatori di dimensione decrescente, e approssimando il valore della soluzione con un valore interno a tale intervallo.
Nello specifico il metodo della bisezione viene definito come segue.

Algoritmo 1 (Metodo della Bisezione)**.** *Data $f(x)$ e trovato un intervallo $I_0 = [a_0, b_0]$ per cui il Teorema degli zeri 1.1 è verificato.*

1. *Dato $k \geq 0$, e il k-intervallo separatore $I_k = [a_k, b_k]$, prendiamo come prima approssimazione della soluzione il punto medio di I_k,*

$$c_k = \frac{a_k + b_k}{2}. \tag{1.2}$$

2. *Se $f(c_k)$ è zero, allora abbiamo trovato una soluzione ξ di $f(x) = 0$.*

3. *Altrimenti, definiamo il nuovo intervallo $I_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}]$ come*

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} [a_k, c_k] & \text{se } f(c_k)f(a_k) < 0, \\ [c_k, b_k] & \text{se } f(c_k)f(b_k) < 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

4. *Poniamo $k = k + 1$, e ripetiamo la procedura dal punto 1.*

Definizione 1.2 (Convergenza)**.** *Un metodo iterativo per il problema* (1.1)*, si dice convergente, se produce una sequenza $\{x_k\}$ convergente a ξ per $k \to \infty$. In altre parole, definito l'errore*

$$E_k = |x_k - \xi|, \qquad k \geq 0 \tag{1.4}$$

si ha che $E_k \to 0$ per $k \to \infty$.

L'analisi della convergenza del metodo di bisezione segue direttamente, in quanto è possibile stimare l'errore dalla soluzione dalla dimensione dell'intervallo separatore. Definito l'*errore del metodo* come

$$E_k = |x_k - \xi|, \qquad k \geq 0 \tag{1.5}$$

per costruzione del *metodo della bisezione* vale la seguente stima,

$$E_k \leq \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2^2} = \ldots = \frac{b_0 - a_0}{2^k}. \tag{1.6}$$

Da cui si ottiene la convergenza del metodo dato che per $k \to \infty$ la sequenza $L_k := 2^{-k}(b_k - a_k) \to 0$ e quindi anche $E_k \to 0$, essendo $0 \leq E_k \leq L_k$.

Definizione 1.3 (Ordine di Convergenza)**.** *Supponiamo che $\{x_k\}$ converga a ξ. Diciamo che la sequenza $\{x_k\}$* **converge a ξ con almeno ordine** *$q > 1$, se esistono una sequenza $\{\varepsilon_k\}$ di numeri reali positivi convergenti a 0, e $\mu > 0$, tali che*

$$|x_k - \xi| \leq \varepsilon_k, \quad k \geq 0, \tag{1.7}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^q} = \mu. \tag{1.8}$$

Inoltre

- *(Esatta convergenza). Se valgono (1.7) e (1.8) e $\varepsilon_k = |x_k - \xi|$ per $k \geq 0$, allora la sequenza $\{x_k\}$* **converge a ξ con ordine** *q.*

- *Se $q = 1$, e $\mu < 1$ la sequenza converge* **linearmente** *a ξ.*

- *Se $q = 1$, e $\mu = 1$ la sequenza converge* **sub-linearmente** *a ξ.*

- *Se $q > 1$ invece la sequenza è detta convergere* **super-linearmente** *a ξ. (Se $q = 2$ la convergenza è* **quadratica***).*

L'*ordine di convergenza* del metodo di bisezione si ricava essere lineare, infatti risulta che

$$|x_{k+1} - \xi| \simeq \frac{|b_{k+1} - a_{k+1}|}{2} = \frac{|b_k - a_k|}{2^2}$$

e dalla (1.6) si ha

$$\frac{|x_{k+1} - \xi|}{|x_k - \xi|} \simeq \frac{|b_k - a_k|}{2^2} \cdot \frac{2}{|b_k - a_k|} = \frac{1}{2},$$

quindi $\mu = 1/2$ e $p = 1$.

Osservazione 1.4. *In generale sulla convergenza di metodi iterativi per zeri di funzione vale la seguente distinzione*

- **Convergenza locale***: Se il metodo converge a ξ solo sotto la condizione che x_0 sia "abbastanza vicino" a ξ.*

- **Convergenza globale***: Se il metodo converge a ξ indipendentemente dalla vicinanza di x_0 a ξ.*

Notare che il metodo di bisezione converge globalmente, una volta che il teorema degli zeri è soddisfatto per l'intervallo separatore iniziale.

Nelle prossime sezioni vedremo dei metodi iterativi per i quali ha senso distinguere tra convergenza globale e locale, e cosa intendiamo per "abbastanza vicino".

Metodo della bisezione asimmetrico. Consideriamo una generalizzazione del metodo di bisezione, andando a prendere il punto di bisezione a distanza $p \in [0, 1/2]$ dall'estremo dell'intervallo separatore dove il valore assoluto di f è minore.

Algoritmo 2 (Metodo della Bisezione asimmetrico)**.** *Data $f(x)$ e trovato un intervallo $I_0 = [a_0, b_0]$ per cui il Teorema degli zeri 1.1 è verificato.*

1. *Dato $k \geq 0$, e il k-intervallo separatore $I_k = [a_k, b_k]$, prendiamo come prima approssimazione della soluzione il punto $c_k \in I_k$ tale che,*

$$c_k = \begin{cases} a_k + p(b_k - a_k), & \text{se } |f(a_k)| \leq |f(b_k)|, \\ b_k - p(b_k - a_k), & \text{se } |f(a_k)| > |f(b_k)|, \end{cases} \tag{1.9}$$

2. *Se $f(c_k)$ è zero, allora abbiamo trovato una soluzione ξ di $f(x) = 0$.*

3. *Altrimenti, definiamo il nuovo intervallo $I_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}]$ come*

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} [a_k, c_k] & \textit{se } f(c_k)f(a_k) < 0, \\ [c_k, b_k] & \textit{se } f(c_k)f(b_k) < 0, \end{cases} \tag{1.10}$$

4. *Poniamo $k = k + 1$, e ripetiamo la procedura dal punto 1.*

Osservazione 1.5. *Nel caso generale possiamo dare una stima dell'ordine di convergenza del metodo, si ha infatti che per $p \in [0, 1/2]$*

$$|x_{k+1} - \xi| \leq \begin{cases} (1-p)^k, & \textit{nel peggiore dei casi,} \\ p^k, & \textit{nel migliore dei casi.} \end{cases}$$

Osserviamo che per $p = 1/2$ otteniamo esattamente la bisezione classica, e la stima vista in precedenza.

1.2 Metodo delle secanti

A differenza del metodo della bisezione che trae informazioni solo dai valori della funzione negli estremi dell'intervallo separatore, il metodo delle secanti cerca di ottenere ulteriori informazioni sulla forma della funzione, $f(x)$. Sia f continua a valori reali su un certo intervallo $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ e tale che $f(\xi) = 0$ per $\xi \in I$, andando ad approssimare la funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ con la retta $s(x)$ passante per i punti $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$, ovvero,

$$s(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Allora la soluzione ξ viene approssimata dal punto di intersezione di tale retta con l'asse x, quindi posto $s(x) = 0$

$$x = a - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} f(a).$$

Ripetendo questa procedura otteniamo il metodo delle secanti come segue:

Algoritmo 3 (Metodo delle secanti)**.** *Data $f(x)$ e trovato un intervallo $I = [a, b]$ per cui il Teorema degli zeri 1.1 è verificato, definiamo $x_0 = a$ e $x_1 = b$, allora*

1. *Dato $k \geq 0$, prendiamo come approssimazione della soluzione il punto x_{k+1},*

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.11}$$

2. *Se $f(x_{k+1})$ è zero, allora abbiamo trovato una soluzione per $f(x) = 0$.*

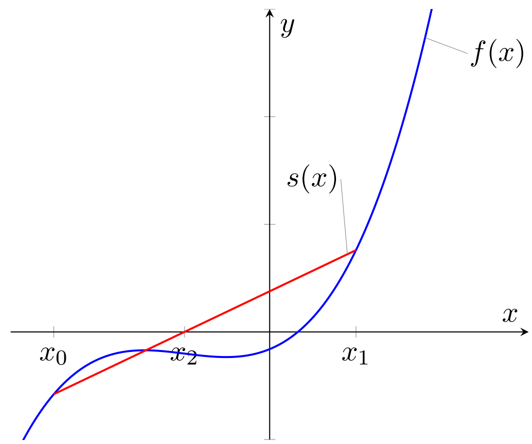

Figure 1: Prima iterazione del metodo delle secanti con $x_0 = -2.5$ e $x_1 = 1$.

3. *Altrimenti, poniamo $k = k + 1$, e ripetiamo la procedura dal punto 1.*

Teorema 1.6 (Convergenza Locale Secanti)**.** *Sia $f \in C^1(I_h)$, continua e differenziabile nell'intervallo centrato in ξ, $I_h = [\xi - h, \xi + h]$, con $h > 0$, e ξ tale che $f(\xi) = 0$ e $f'(\xi) \neq 0$. Allora la successione $\{x_k\}$ generata dal metodo delle secanti* (1.16) *ha convergenza almeno lineare a ξ, se i punti iniziali x_0, x_1 sono "abbastanza vicini" a ξ.*

Proof. Dato che $f'(\xi) \neq 0$ ci poniamo nel caso in cui $f'(\xi) > 0$ e $f'(\xi) = \alpha$ (la dimostrazione nel caso in cui $f'(\xi) < 0$ segue in modo simile). Poiché la derivata prima è continua, $f' \in C^0(I_h)$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intervallo $I_\delta = [\xi - \delta, \xi + \delta]$, con $0 < \delta \leq h$ tale che

$$|f'(\xi) - \alpha| < \varepsilon, \qquad x \in I_\delta.$$

Scegliamo quindi $\varepsilon = \alpha/4$ e dalla precedente relazione otteniamo che

$$\frac{3\alpha}{4} < f'(\xi) < \frac{5\alpha}{4}, \qquad x \in I_\delta. \tag{1.12}$$

Sottraiamo quindi la soluzione ξ ambo i lati dal metodo delle secanti (1.16), e abbiamo che,

$$\begin{aligned}
x_{k+1} - \xi &= x_k - \xi - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k), \\
&= x_k - \xi - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \cdot \frac{f(x_k) - f(\xi)}{x_k - \xi} \cdot (x_k - \xi) \qquad (1.13) \\
&= (x_k - \xi) \cdot \left(1 - \frac{f'(\lambda_k)}{f'(\eta_k)}\right).
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo raccolto il termine comune e utilizzato il Teorema del Valore Medio, vedi Teorema A.2, dove λ_k è contenuto tra ξ e x_k, e η_k tra x_k e x_{k-1}. Quindi, se $x_{k-1} \in I_\delta$ allora $x_k \in I_\delta$, e anche $\eta_k, \lambda_k \in I_\delta$. Da (1.14) e utilizzando (1.12) possiamo stimare la convergenza del metodo come segue,

$$\frac{|x_{k+1}-\xi|}{|x_k-\xi|} = \left|\frac{f'(\eta_k)-f'(\lambda_k)}{f'(\eta_k)}\right| \le \left|\frac{5/4\alpha - 3/4\alpha}{3/4\alpha}\right| = \frac{2}{3}, \tag{1.14}$$

allora, $x_{k+1} \in I_\delta$ e la successione $\{x_k\}$ converge a ξ almeno linearmente, dati $x_0, x_1 \in I_\delta$. $\square$

Osservazione 1.7. *Se $f'(\xi) \neq 0$ e $f''(\xi) \neq 0$ si puó mostrare che*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1}-\xi|}{|x_k-\xi|^q} = \left(\frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}\right)^{\frac{q}{1+q}}, \quad \text{con } q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \tag{1.15}$$

Notare che il numero q corrisponde al numero aureo indicato con Φ, e tale che $\Phi \simeq 1.618\ldots$

Metodo delle secanti - regula falsi. Vediamo una possibile modifica del metodo classico delle secanti che assicura la convergenza,

Algoritmo 4 (Metodo delle secanti-regula falsi)**.** *Data $f(x)$ e trovato un intervallo $I = [a,b]$ per cui il Teorema degli zeri 1.1 è verificato, definiamo $x_0 = a$ e $x_1 = b$, allora*

1. *Dato $k \ge 0$, prendiamo come approssimazione della soluzione il punto x_{k+1},*

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k)-f(x_{k-1})} f(x_k), \qquad k = 0,1,2,\ldots \tag{1.16}$$

2. *Se $f(x_{k+1})$ è zero, allora abbiamo trovato una soluzione per $f(x)=0$.*

3. *Altrimenti, ridefiniamo il valore x_k con la seguente regola (falsi).*

$$x_k = \begin{cases} x_{k-1}, & \text{se } f(x_{k-1})f(x_{k+1}) < 0 \\ x_k, & \text{se } f(x_k)f(x_{k+1}) < 0 \end{cases}$$

   In questo modo ci assicuriamo di cercare una soluzione nell'intervallo in cui il Teorema degli zeri 1.1 è verificato.

4. *Poniamo $k = k+1$, e ripetiamo la procedura dal punto 1.*

Teorema 1.8 (Convergenza Globale Secanti-regula falsi)**.** *Sia $f \in C^2[a,b]$, tale che l'equazione $f(x)=0$ abbia un'unica soluzione $\xi \in [a,b]$, e $f''(x) \neq 0$ per ogni $x \in [a,b]$. Detto $x_0 \in [a,b]$ l'estremo a o b tale che $f(x_0)f''(x_0) < 0$, allora la successione generata dal metodo delle secanti-regula falsi 4 $\{x_k\}$ è monotona decrescente e tale che $x_k \to \xi$ per $k \to \infty$.*

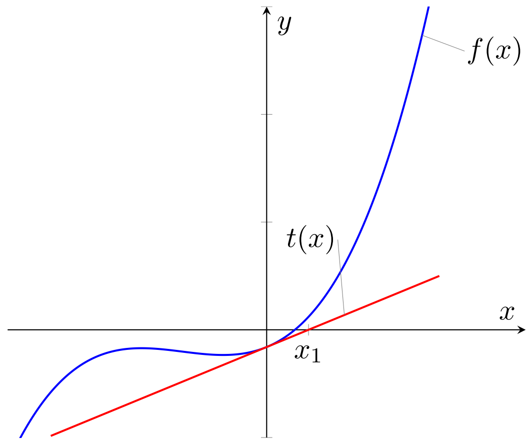

Figure 2: Metodo di Newton con punto iniziale $x_0 = 0$.

1.3 Metodo di Newton

Vediamo infine il cosidetto metodo di Newton, o metodo delle tangenti. L'idea base del metodo è di approssimare la soluzione creando una successione di punti, a partire dalle tangenti a $f(x)$, per cui viene richiesta una maggiore regolarità della funzione.

Sia allora f continua e differenziabile a valori reali su un certo intervallo $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ e tale che $f(\xi) = 0$ e $f(x) \neq 0$ per $\xi \in I$, determiniamo la tangente $t(x)$ alla funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nel punto $P = (x_0, f(x_0))$ con $x_0 \in [a, b]$, ovvero,

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Allora la soluzione ξ viene approssimata dal punto di intersezione di tale retta con l'asse x, quindi posto $t(x) = 0$

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Ripetendo questo ragionamento otteniamo quindi il metodo di Newton:

Algoritmo 5 (Metodo di Newton)**.** *Data $f(x)$ e trovato un intervallo $I = [a, b]$ per cui il Teorema degli zeri 1.1 è verificato, prediamo $x_0 \in I$ allora*

1. *Dato $k \geq 0$, definiamo x_{k+1} come*

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.17}$$

2. *se $f(x_{k+1})$ è zero, allora abbiamo trovato una soluzione per $f(x) = 0$.*

3. *Altrimenti, poniamo $k = k + 1$, e ripetiamo la procedura dal punto 1.*

Vediamo subito come sia possibile mostrare la convergenza (locale) del metodo di Newton, sotto opportune ipotesi sulla f e la scelta del punto iniziale, x_0.

Teorema 1.9 (Convergenza Locale Newton)**.** *Sia $f \in C^2(I_h)$, continua e differenziabile due volte nell'intervallo centrato in ξ, $I_h = [\xi - h, \xi + h]$, con $h > 0$, e ξ tale che $f(\xi) = 0$ e $f'(\xi), f''(\xi) \neq 0$. Supponiamo, inoltre che esista una costante positive $M > 0$, tale che*

$$\frac{|f''(x)|}{|f'(y)|} \leq M, \qquad \forall x, y \in I_h, \tag{1.18}$$

Allora la successione $\{x_k\}$ generata dal metodo di Newton (1.17) *ha convergenza quadratica a ξ, se il punto iniziale x_0 è "abbastanza vicino" a ξ.*

Proof. Sia $k \geq 0$ e I_δ un intorno di ξ, e supponiamo che per x_k si abbia $|\xi - x_k| < \delta$ con $\delta = \min\{h, 1/M\}$, allora $x_k \in I_\delta$. Allora per il Teorema di Talyor, vedi Teorema A.3, espandendo attorno al punto $x_k \in I_\delta$ la funzione $f(x)$ e sostituendo $x = \xi$, otteniamo

$$0 = f(\xi) = f(x_k) + (\xi - x_k)f'(x_k) + \frac{(\xi - x_k)^2}{2} f''(\eta_k), \tag{1.19}$$

con $\eta_k \in [\xi, x_k]$, e quindi anche η_k è contenuto in I_δ. Dalla relazione precedente dividendo per $f'(x_k)$ otteniamo la seguente espressione

$$\begin{aligned} 0 = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + (\xi - x_k) + \frac{(\xi - x_k)^2}{2} \frac{f''(\eta_k)}{f'(x_k)}, \\ 0 = (\xi - x_{k+1}) + \frac{(\xi - x_k)^2}{2} \frac{f''(\eta_k)}{f'(x_k)}, \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la definizione di x_{k+1} in (1.17).

Vediamo quindi la convergenza del metodo, dato che $|\xi - x_k| \leq 1/M$ e data la (1.18) otteniamo dalla relazione precedente

$$|\xi - x_{k+1}| = \frac{|\xi - x_k|^2}{2} \left| \frac{f''(\eta_k)}{f'(x_k)} \right| \leq \frac{|\xi - x_k|}{2} \frac{1}{M} \cdot M = \frac{|\xi - x_k|}{2},$$

inoltre avendo posto $|\xi - x_0| \leq \delta$ per induzione abbiamo che $|\xi - x_k| \leq 2^{-k}\delta$ per ogni $k \geq 0$. Quindi possiamo concludere che per $k \to \infty$ la successione $\{x_k\}$ converge a ξ.

Per ottenere l?ordine di convergenza, osserviamo che $\eta_k \in [\xi, x_k]$ allora $\eta_k \to \xi$ per $k \to \infty$, inoltre dato che f' e f'' sono continue su I_δ segue che

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|x_{k+1} - \xi|}{|x_k - \xi|^2} = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} \right|,$$

che implica ordine di convergenza quadratico della successione $\{x_k\}$ a ξ, e con $f''(\xi)/2f'(\xi) \in (0, M/2]$. $\square$

Teorema 1.10 (Convergenza Globale Newton)**.** *Sia $f \in C^2[a,b]$, tale che $f(x) = 0$ ha un'unica soluzione $\xi \in [a,b]$, e $f'(x), f''(x) \neq 0$ per ogni $x \in [a,b]$. Detto $x_0 \in [a,b]$ tale $f(x_0)f''(x_0) > 0$, allora la successione generata dal metodo di Newton $\{x_k\}$ è monotona decrescente e tale che $x_k \to \xi$ per $k \to \infty$.*

Proof. (Traccia della prova). Ci focalizziamo sul caso $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ e $f''(x) > 0$, (gli altri casi si provano in modo analogo). Posto $x_0 = b$ allora la condizione $f(x_0)f''(x_0) > 0$ è soddisfatta. Quindi per continuità dato che ξ è l'unica radice si ha che in $(\xi, x_0]$ la funzione $f(x) > 0$, e $f'(x) > 0$. Allora la successione generata dal metodo di Newton a partire da x_0 è tale che

$$x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0) < x_0$$

dato che $f(x_0)/f'(x_0) > 0$, inoltre $\xi < x_1$ per costruzione. Nell'intervallo $(\xi, x_1]$ ritroviamo le stesse condizioni del passo precedente quindi possiamo reiterare il processo per $k \geq 1$,

$$\xi < \ldots < x_k < \ldots < x_1 < x_0,$$

quindi $\{x_k\}$ è monotona decrescente a ξ.

□

Esempio. Sia $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$, vogliamo determinare le soluzioni di $f(x) = 0$ e per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ si ha convergenza globale del metodo di Newton. Calcoliamo allora le caratteristiche della funzione, si ha che $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, $f'(x) = 6(x^2 - x - 2) = 6(x-2)(x+1) = 0$ allora ha punti critici in $x = 2$ (minimo relativo, e $f(2) = -19$), $x = -1$ (massimo relativo, e $f(-1) = 8$), e $f''(x) = 12x^2 - 6 = 0$ quindi $x = 1/2$ rappresenta il cambio di convessità della funzione, in particolare $f''(x) \geq 0$ per $x \geq 1/2$, e $f''(x) < 0$ per $x < 1/2$, si veda il grafico in Figura 1.3.

Si mostra quindi che i punti che soddisfano $f(x_0)f''(x_0) > 0$ sono quelli dove il segno della funzione $f(x)$ e della derivata seconda $f''(x)$ è uguale. Nel caso in esame questi corrispondono ai punti appartenenti all'insieme,

$$\mathcal{A} = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = (-\infty, \xi_1) \cup (\xi_2, 1/2) \cup (\xi_3, +\infty),$$

detto anche bacino di attrazione. Quando il metodo di Newton è inizializzato a partire da questi punti si ha convergenza a una delle tre radici. In particolare notiamo che per $x_0 \in A_1$ il metodo converge a ξ_1, altrimenti a ξ_2, ξ_3, rispettivamente se preso in A_2, A_3.

Esempio. (Formula generalizzata di Erone.) Consideriamo il problema di trovare la radice n-esima di un numero $L > 0$, allora definiamo la funzione

$$f(x) = x^n - L, \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

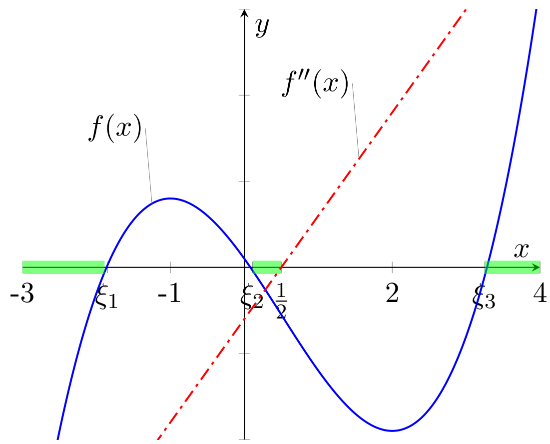

Figure 3: In verde sono evidenziati i punti per cui Newton converge globalmente alle soluzioni di $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$.

la cui soluzione $f(x) = 0$, corrisponde esattamente a $x = \sqrt[n]{L}$. Applicando la formula di Newton (1.17), otteniamo la seguente formula per l'approssimazione di $\sqrt[n]{L}$,

$$x_{k+1} = \frac{1}{n}\left[(n-1)x_k + \frac{L}{x_k^{n-1}}\right], \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Per $n = 2$ otteniamo la formula per il calcolo della radice quadrate, attribuita ad Erone, nel 2 secolo d.c., ma già nota ai babilonesi,

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left[x_k + \frac{L}{x_k}\right], \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Criterio di arresto. Dato metodo iterativo convergente, una domanda naturale è chiedersi quante iterazioni sono richieste per ottenere una soluzione che sia sufficientemente buona. Un modo per fare questo è andare a definire un criterio d'arresto, che ci permetta fissare una determinata accuratezza sulla nostra soluzione approssimata.

Distinguiamo quindi tra i seguenti criteri di arresto per un metodo iterativo per il calcolo degli zeri di una funzione,

1. $E_k = |x_k - \xi| <$ tol, presuppone una conoscenza della soluzione esatta ξ.

2. $E_k = |x_{k+1} - x_k| <$ tol, se la successione converge ci aspettiamo che per differenze molto piccole di x_{k+1} e x_k la soluzione del problema sia raggiunta. Possiamo avere dei problemi quando $|x_k| \ll 1$, e.g. se $x_k, x_{k+1} \sim 10^{-10}$ e tol $< 10^{-6}$, oppure se

$|x_k| \gg 1$, e.g. $x_k, x_{k+1} \sim 10^{12}$. Un modo per ovviare a questo problema è considerare l'errore relativo

$$E_k^{rel} = \frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|}.$$

In questo modo le scale dell'errore vengono normalizzate.

3. $E_k = |f(x_k)| < \text{tol}$, in questo caso si usa come stima dell'errore la vicinanza di $f(x_k)$ a 0. Distinguiamo tre situazioni,
   - $|f'(x_k)| \gg 1$, in questo caso il criterio sovrastima l'errore reale $|x_k - \xi|$.
   - $|f'(x_k)| \ll 1$, in questo caso il criterio sottostima l'errore reale $|x_k - \xi|$.
   - $|f'(x_k)| \sim O(1)$, in questo caso il criterio è una buona stima per $|x_k - \xi|$.

Osservazione 1.11. *In generale non esiste un criterio di arresto migliore di un altro, ogni caso va valutato in modo specifico. Una possibilità è anche quella di combinare i vari criteri.*

1.4 Riepilogo

Per risolvere $f(x) = 0$ valutiamo i seguenti aspetti in un metodo numerico iterativo

- *Localizzazione delle soluzioni*: è importante dare al metodo una stima piú accurata possibile della soluzione.
- *Iterazione*: la soluzione è approssimata tramite una successione $\{x_k\}$.
- *Convergenza*: Vogliamo assicurare che il metodo sia convergente, ovvero $\{x_k\} \to \xi$.
- *Ordine di convergenza*: Ci interroghiamo a che velocitá il metodo converge alla soluzione.
- *Criterio di arresto*: Vogliamo determinare una regola per fermare il metodo.

Su questa base riassumiamo nella Tabella 1 i vantaggi e gli svantaggi dei metodi.

1.5 Esercizi

Esercizi `15.03`

Vogliamo trovare uno zero della funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, sotto le ipotesi che $f \in C^0([a, b])$ e $f(a)f(b) < 0$. Definiamo $\xi \in (a, b)$ tale soluzione, i.e. $f(\xi) = 0$, allora

1. dato E_k, l'errore del metodo del *metodo della bisezione* al k-esimo passo, come

$$E_k = |x_k - \xi|,$$

   con $x_k = (a_k + b_k)/2$, e $[a_k, b_k]$ l'intervallo separatore.

Metodo	Vantaggi	Svantaggi
Bisezione	(+) Risulta sempre convergente, per ogni scelta dell'intervallo separatore. (+) Il costo è ridotto infatti richiede solo il calcolo del punto medio x_i e la valutazione di $f(x_i)$.	(−) Puó risultare estremamente lento se l'intervallo spearatore è troppo ampio. Infatti ha ordine di convergenza lineare.
Secanti	(+) Sotto opportune ipotesi risulta avere ordine di convergenza piú che lineare. (+) Il costo è sempre ridotto richiede due valutazioni di $f(x)$ in x_{k-1}, x_k e il calcolo del punto x_{k+1}.	(-) In generale non converge alla soluzione. (-) In generale non è possibile stimare l'ordine di convergenza del metodo.
Secanti-rf	(+) Assicura la convergenza del metodo re-introducendo il concetto di intervallo separatore.	(-) Non è possibile in generale stimare l'ordine di convergenza.
Newton	(+) La convergenza sotto opprtune ipotesi è quadratica.	(-) Ha un costo piú elevato, in quanto richiede il calcolo della derivata di $f(x)$, e la valutazione di $f(x)$ e $f'(x)$ ad ogni iterazione. (-) In generale non è possibile stimare l'ordine di convergenza del metodo.

Table 1: Confronto tra i vari metodi iterativi per il calcolo degli zeri di $f(x)$.

- Mostrare che $E_k \le b_k - a_k = (b-a)/2^k$.
- Vogliamo imporre una certa tolleranza ε sull'errore, i.e. $E_k \le \varepsilon$. Mostrare che per migliorare di una cifra significativa la tolleranza ($E_k \le \varepsilon/10$) sono necessarie in media 3.3 iterazioni aggiuntive.

2. Modificare il metodo della bisezione definendo x_k ad un terzo dell'ampiezza dell'intervallo dall'estremo in cui il valore assoluto della funzione è minore. In altre parole definiamo ad ogni $k = 1, 2, \dots$

$$x_k = \begin{cases} a_k + \frac{1}{3}(b_k - a_k), & \text{se } |f(a_k)| \le |f(b_k)| \\ a_k + \frac{2}{3}(b_k - a_k), & \text{se } |f(a_k)| > |f(b_k)| \end{cases}$$

- Riscrivere il metodo della bisezione con questa modifica.
- Discutere come cambia l'ordine di convergenza del metodo.

Esercizi `17.03`

Dato il metodo della bisezione asimmetrico, vedi il punto 2. del precedente esercizio.

1. Modificare il codice `main_bisezione.m` in modo da ottenere il metodo modificato `main_bisezione_asimmetrico.m`, (fatto a laboratorio).
2. Aggiungere una condizione che controlli che il metodo della bisezione sia applicabile, i.e. $f(a) * f(b) < 0$, prima di lanciare il ciclo `while` e se non è soddisfatta fermare il codice (Hint: usare il comando `return`).
3. Studiare come cambia la convergenza del metodo per le seguenti funzioni:
   - $1 - x^2 + 5\sin(4x^2)$ nell' intervallo $[-2, 0.5]$.
   - $y = x^3 - 5x - 1$ nell' intervallo $[-2, 0.5]$.
4. Confrontare la convergenza dei due metodi al variare della funzione. Quante iterazioni impiegano per raggiungere la tolleranza $\varepsilon = 1e - 6$, e $\varepsilon = 1e - 8$?
5. Modificare il codice `main_bisezione_asimmetrico.m` introducendo un parametro $p \in [0, 1]$, in modo che il punto di bisezione sia a distanza $p * (b - a)$ dall'estremo dell'intervallo separatore dove la funzione assume valore assoluto minore.

Esercizi `22.03`

1. Trovare un intervallo separatore opportuno, dove applicare il metodo della bisezione, per le seguenti funzioni:
$$f(x) = \ln(x) - 5 + x$$
$$f(x) = x^2 - 10x + 23$$
2. Usare il metodo della bisezione per trovare solution accurate fino a $\varepsilon = 10^{-2}$ per
$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0, \qquad \text{in } [0, 1].$$
confrontare i valori con quelli ottenuti il codice `main_bisezione.m`.
3. Determinare il numero di iterazioni necessarie per raggiungere un'approssimazione di accuratezza $\varepsilon = 10^{-3}$ per la soluzione di
$$f(x) = x^3 - x - 1 = 0, \qquad \text{in } [1, 4],$$
confrontare i valori con quelli ottenuti il codice `main_bisezione.m`.

4. Trovare lo zero della funzione

$$f(x) = 3\ln(x) - x \qquad \text{in } [1, e]$$

approssimando la soluzione con

- 4 passi della bisezione,
- 2 passi delle secanti,
- 2 passi del metodo di Newton.

5. Un proiettile viene lanciato ad una velocitá v_0 con un'inclinazione α in un tunnel di altezza h e raggiunge la massima gittata quando α è tale che

$$f(\alpha) = \sin(\alpha) - \sqrt{2gh/v_0^2} = 0.$$

con g la costante di gravità. Si calcoli α con il metodo di Newton quando $v_0 = 10m/s$ e $h = 1m$.

Esercizi `31.03`

1. Confrontare al variare del criterio di arresto la convergenza del metodo di Newton per le seguenti funzioni:

- $1 - x^2$ in $[-2, 0]$.
- $1 - x^2 + 5\sin(4x^2)$ in $[-1.5, 0.5]$.
- $\frac{1}{2} - \frac{1}{1 + M|x|}$ in $[0, 2]$ con $M = 1$ e $M = 10^4$.

2. Modificare il codice per trovare gli zeri della funzione:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 = 0$$

trovare gli intervalli separatori (svolto in classe), e confrontare secanti, newton e bisezione

A Appendice

Teorema A.1 (Teorema dei valori intermedi)**.** *Sia f una funzione a valori reali definita continua nell'intervallo $[a, b]$ di $\mathbb{R}$. Allora, f è una funzione limitata nell'intervallo $[a, b]$ e, se $z \in \mathbb{R}$ è tale che*

$$\inf_{x\in[a,b] f(x)} \leq z \leq \sup_{x\in[a,b]} f(x),$$

*allora esiste un numero reale $\zeta \in [a, b]$ tale che $f(\zeta) = z$. Nella fattispecie, l' "*inf*" e il "*sup*" di f sono raggiunti e possono essere sostituiti rispettivamente dal $\min_{x\in[a,b]}$ e dal $\max_{x\in[a,b]}$.*

Teorema A.2 (Teorema dei valore medio)**.** *Sia f una funzione a valori reali definita continua nell'intervallo $[a, b]$ di $\mathbb{R}$ e differenziabile in (a, b). Allora, esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Teorema A.3 (Teorema di Taylor – resto di Lagrange)**.** *Consideriamo un intervallo $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ed un punto $x_0 \in (a, b)$. Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile n volte nell'intervallo (a, b), con $n \geq 1$, e supponiamo che la derivata n-esima $f^{(n)}$ sia continua nell'intervallo chiuso $[x_0, x]$. Allora, il polinomio di Taylor di grado n è definito come*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j + \frac{f^{(n)}(\lambda)}{n!}(x - x_0)^n,$$

con $\lambda \in [x_0, x]$.