

Unità di misura e Analisi Dimensionale

Analisi dimensionale

- L'analisi dimensionale è uno strumento matematico applicato in fisica, chimica, ingegneria e in **biomeccanica**.
- È utilizzata per formare ipotesi su situazioni fisiche complesse che possono essere verificate da esperimenti.

Definiamo le dimensioni

- Le dimensioni sono riferite a grandezze fisiche e sono associate a simboli, come M, L, e T che rappresentano massa, lunghezza, e tempo
- Nell'ambito del Sistema internazionale di misura sono definite
 - **“dimensioni fondamentali”**
- Tutte le unità di misura sono riconducibili a queste unità fondamentali

Esempio

- L'altezza massima che un corpo può raggiungere (saltando) è definita dalla massa del corpo e dalla forza di gravità
- Le dimensioni sono la massa (M) e la forza di gravità ($M \cdot L/T^2$)
- Animali leggeri= $\ll M$ e $\ll g$
- Una pulce può saltare 100 volte la lunghezza del suo corpo

Dimensioni e formule

- Ogni formula è riducibile alle sue dimensioni

Dimensioni e unità di misura

- Le dimensioni che definiscono la velocità
 - distanza/tempo ; L/T .
- Le dimensioni che definiscono una forza
 - massa \times distanza/tempo² o ML/T^2 .
- Le unità di misura per L sono:
 - metri, piedi, pollici, miglia o micron; ma qualsiasi lunghezza ha come **dimensione L**.

Fattore di conversione

Concetto di a-dimensionalità

- Due differenti unità di misura della stessa grandezza fisica hanno fattori di conversione tra loro.
 - Per esempio: $1 \text{ in} = 2.54 \text{ cm}$; allora $(2.54 \text{ cm}/1\text{in})$ è il fattore di conversione il quale è a-dimensionale:
 L/L

- **esempio**

- **Velocità : distanza/tempo (L/T or LT^{-1})**
- **Forza: massa \times accelerazione o massa \times (distanza/tempo²) (ML/T^2 or MLT^{-2}).**

Una distanza può avere come unità i metri i piedi, le miglia i chilometri ma ogni distanza ha dimensione L

- Due diverse unità della stessa quantità fisica hanno un fattore di conversione tra loro: $1 \text{ in} = 2.54 \text{ cm}$; quindi (2.54 cm/in) è detto fattore di conversione, **ed è senza dimensioni!!!!**
- Non esistono fattori di conversione fra dimensioni

Le Formule

- Da queste unità di base se ne possono derivare altre. Sono rappresentate da un insieme di unità di base accoppiate fra loro attraverso moltiplicazioni e/o divisioni.
- Queste relazioni sono separate da punti kg.m.s^{-2} e possono essere scritte in modi diversi.
- Per esempio, l'accelerazione di gravità è approssimativamente 9.81 metri al secondo al secondo e può essere scritta in questi modi:
- 9.81m/s^2 9.81m.s^{-2}

Formule a-dimensionali

- L'analisi dimensionale di ogni equazione deve essere da un punto di vista delle dimensioni **consistente**:
- I termini nelle due parti dell'equazione devono avere le stesse dimensioni
- Ad esempio nel moto uniformemente accelerato: la distanza x percorsa nel tempo t da un oggetto che parte da fermo e si muove a costante accelerazione è:
- $x = at^2 / 2.$
- Verifichiamo la consistenza dimensionale:
- Accelerazione è misurata in unità di m/s^2 . Quindi ha dimensioni $[a] = L / T^2$, e quindi i termini dell'equazione sono:
- $L = (L / T^2) * T^2 \text{ ----- } L=L$

Unità per esprimere le quantità misurate

‘Systeme International d’Unites’ (sistema SI) rappresenta un sistema razionale e coerente per misurare e dichiarare quantità fisiche.

Tabella 1. Alcune quantità fisiche di base

Quantità fisiche di base	Simbolo	Nome	SI Unità
Lunghezza	L	metri	m
Massa	M	chilogrammi	kg
Tempo	T	secondi	s
Angolo	α, β, φ	radianti	rad

Sistema Internazionale

Tabella 2. I prefissi usati più' comunemente sono:

Prefisso	Moltiplicatore	Simbolo	Esempio
mega	10^6	M	megawatt (MW)
kilo	10^3	k	kilojoule (kJ)
centi	10^{-2}	c	centimetri (cm)
milli	10^{-3}	m	Milligrammi (mg)
micro	10^{-6}	μ	Microsecondi (μ s)

Table 3. Unità usate comunemente in scienze motorie.

Quantità Fisiche	Simbolo	Unità	Dimensioni
Velocità	v	$m.s^{-1}$	Distanza/tempo
Accelerazione	a	$m.s^{-2}$	Velocità/tempo
Accelerazione di gravità	g	$m.s^{-2}$	Velocità/tempo
Velocità' angolare	α	$rad.s^{-1}$	Angolo/tempo
Accelerazione angolare	$\dot{\alpha}$	$rad.s^{-2}$	Velocità angolare/tempo
Periodo	T	s (Tempo per 1 ciclo)	tempo
Frequenza	f	Hz (Hertz)	Ripetizioni/tempo
Densità'	ρ	$kg.m^{-3}$	Massa/volume
Forza	F	$kg.m.s^{-2}$ o N (Newton)	Massa * accelerazione (a)
Peso	W	N (massa x gravità)	Mass * accelerazione (g)
Momento di una forza	M	N.m	Forza * distanza
Lavoro	W	J (Joule = 1 N.m)	Forza * distanza
Energia	<i>diverse</i>	J	
Potenza	P	W (Watt = 1 J.s ⁻¹)	(Forza * distanza)/tempo

*Unità che si riferiscono a nomi di scienziati sono scritti in lettere capitali (N= Isaac Newton, W= James Watt) tutti gli altri in lettere minuscole.

Il concetto di scala



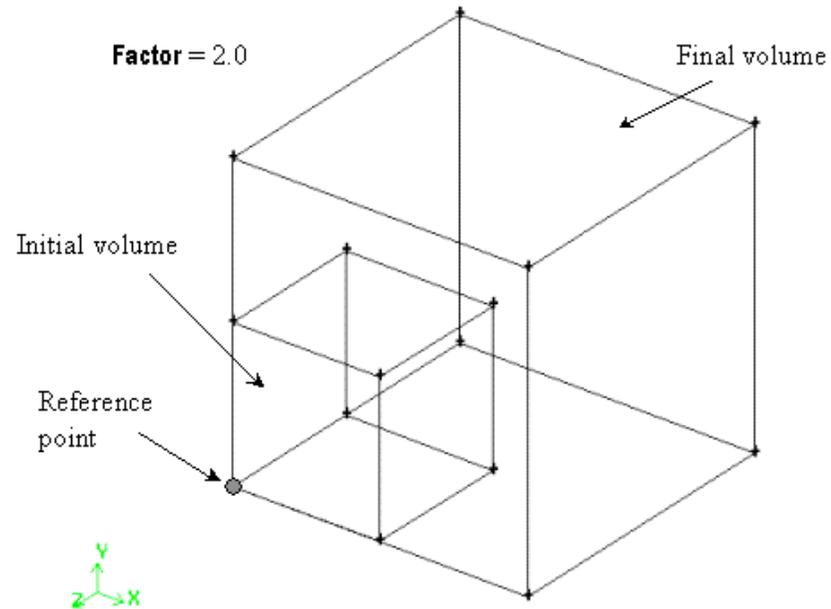


Il concetto di scala si applica ogni qualvolta un sistema è rappresentato proporzionalmente da un altro sistema

Ad esempio la scala di una mappa può essere aumentata o ridotta ed indica il rapporto tra le distanze della mappa e la distanza reale.

- Una mappa in scala 1:50,000 mostra una distanza reale di 50,000 cm (=500 m) come 1 cm sulla mappa

Oggetti geometricamente simili



Fattore scalare

E' un numero che divide o moltiplica una quantità:

$$y=Cx$$

C è il fattore scalare per x ed è chiamato costante di proporzionalità.

$$L_1 = L_0 \cdot c \quad \text{Lunghezza}$$

$$A_1 = A_0 \cdot c^2 \quad \text{Superficie}$$

$$V_1 = V_0 \cdot c^3 \quad \text{Volume}$$

Il mondo animale

- Che cosa hanno a che vedere le relazioni scalate con il mondo animale?
- Definiscono attraverso le proporzioni e la forma le funzioni e i movimenti che i corpi possono eseguire.



Dimensioni e forma

- C'è una relazione funzionale fra la dimensione e la forma
- La forma delle gambe di un bufalo che pesa 500 kg è diversa dalla forma delle gambe di una zanzara che pesa qualche grammo
- I vincoli fisici (ad esempio le masse) influiscono sulla forma che un sistema biologico può prendere.

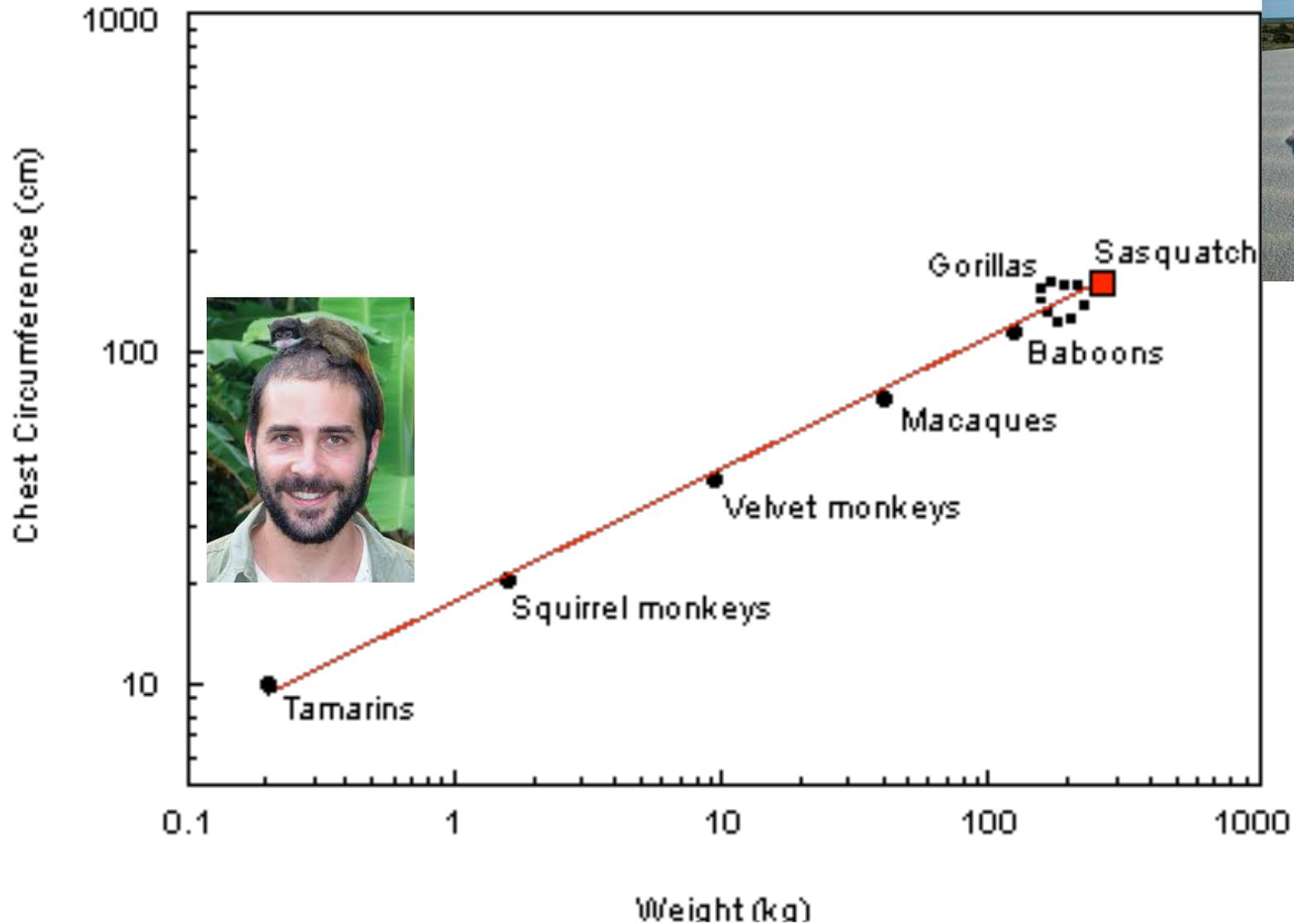
Vincoli fisici

- La forma impone alla dimensione delle restrizioni:
 - Per volare il peso deve essere relativamente basso: uccelli molto grandi come gli struzzi hanno perso la possibilità di volare.
 - Gli animali più grandi sul pianeta sono acquatici: sono sorretti dall'acqua e meno vincolati alla forza di gravità

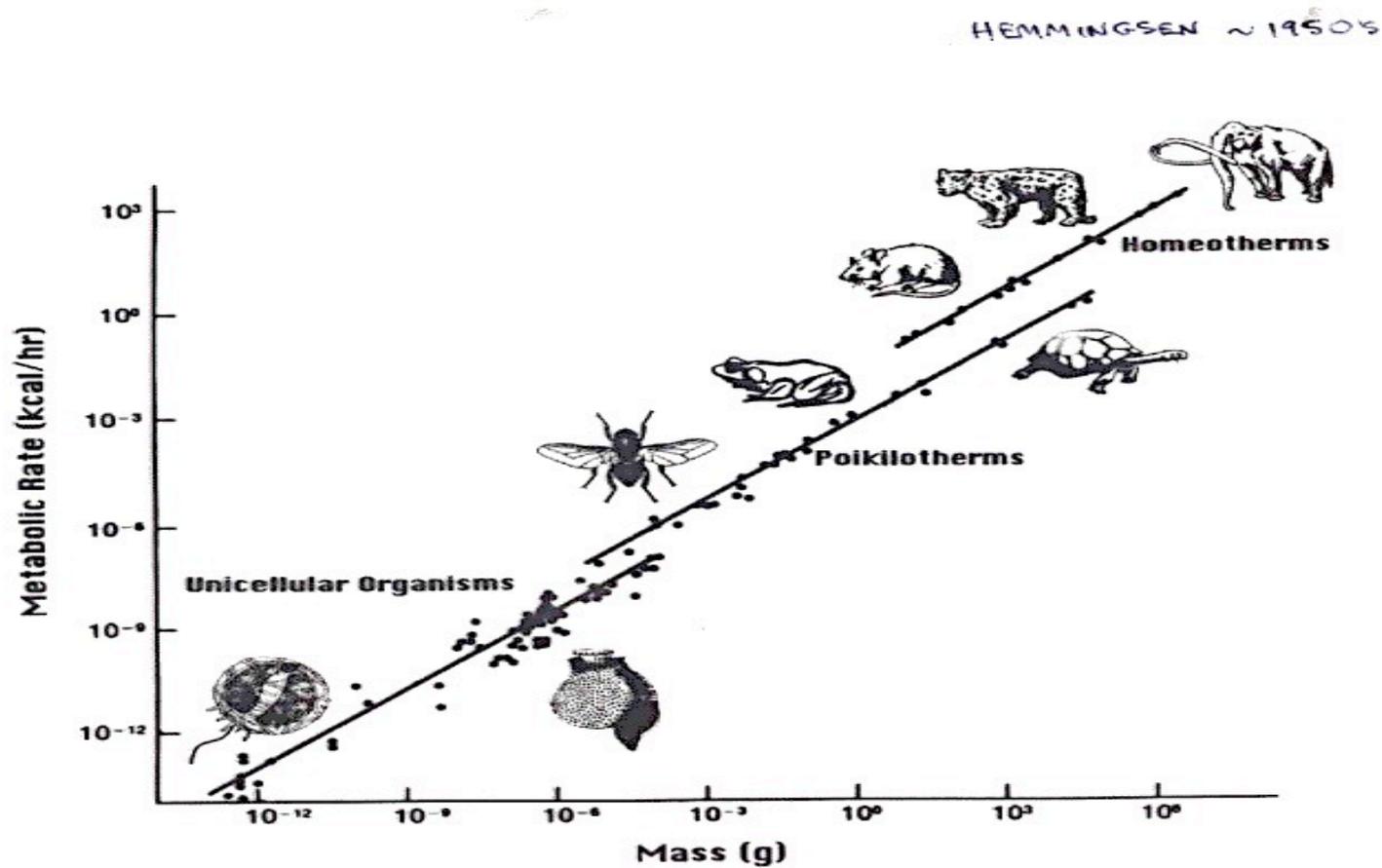
Fattori scalari

- In natura le dimensioni scalano le grandezze fra gli animali
- Che cosa comporta questo?
- Animali piccoli e animali grandi presentano alcune proporzionalità stabili

Peso e circonferenza torace



Metabolismo e Massa



Allometric scaling of metabolic rate for a selection of homeotherms (birds and mammals), poikilotherms (fish, reptiles, amphibians, and invertebrates), and unicellular organisms. The solid lines all have a slope of .75. Modified from Hemmingsen, 1960.

Il corpo umano

- **Come agiscono le dimensioni sul corpo umano?**
- Definiscono le grandezze le forme e le capacità che possono esprimere

esempio

- A parità di densità le masse e le lunghezze di diverse mani sono geometricamente simili?
- Se si dovremmo trovare una relazione:
 - $M=L^3$

Mani geometricamente simili

$$M=L^3$$

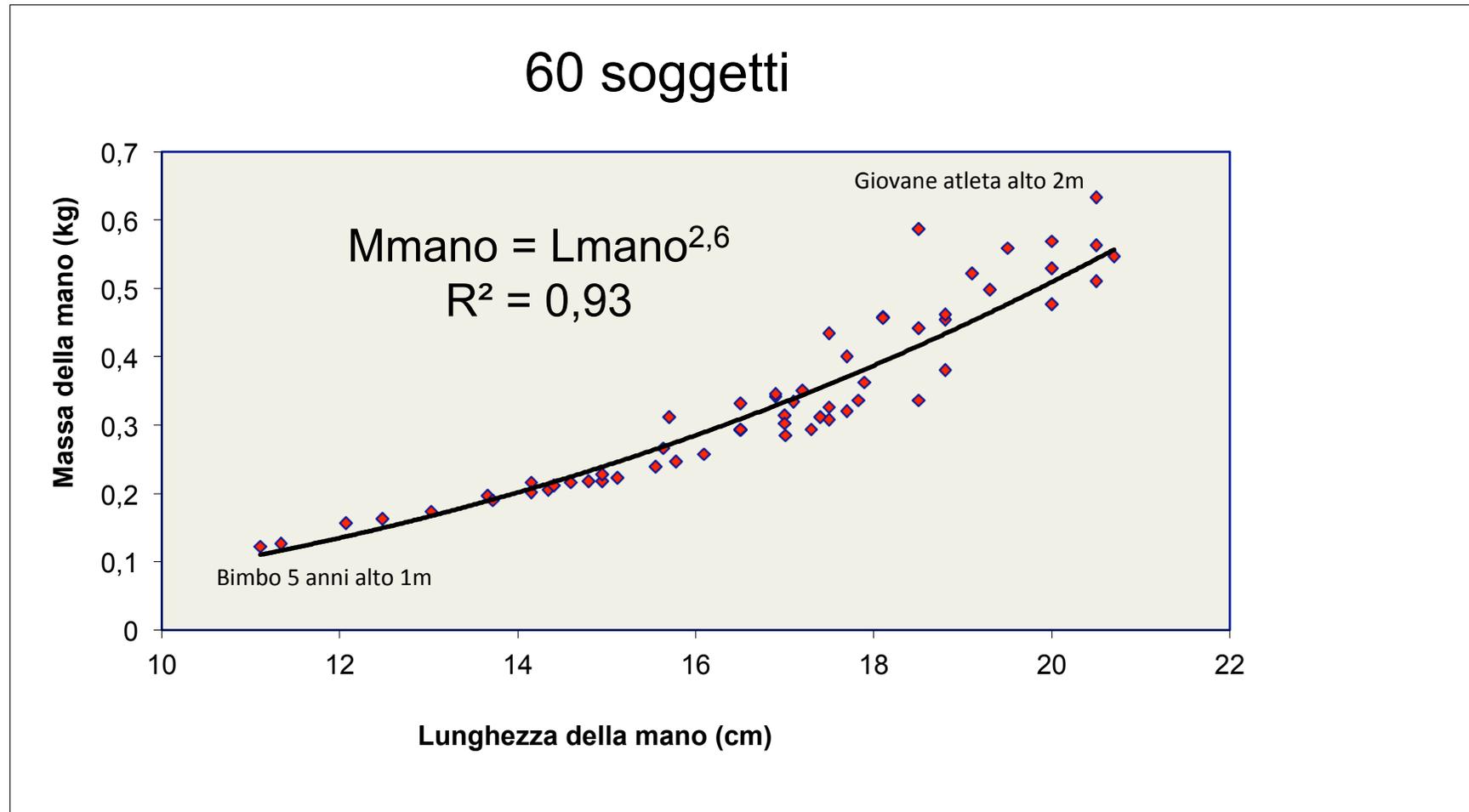
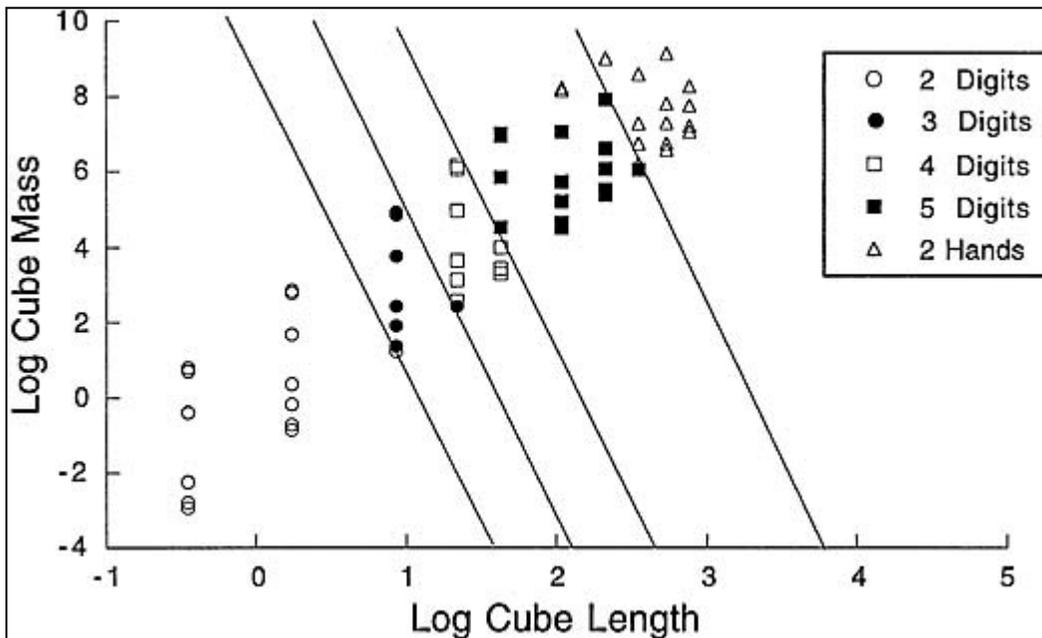


Figure 2



The Scaling of Human Grip Configurations.

Cesari, Paola; Newell, Karl

Journal of Experimental Psychology: Human Perception & Performance. 25(4):927-935, August 1999.

Figure 2 . A plot of the best-fitting common-sloped line that separates the grip configurations used by a single participant for the set of cubes as revealed in the log mass versus log length configuration.

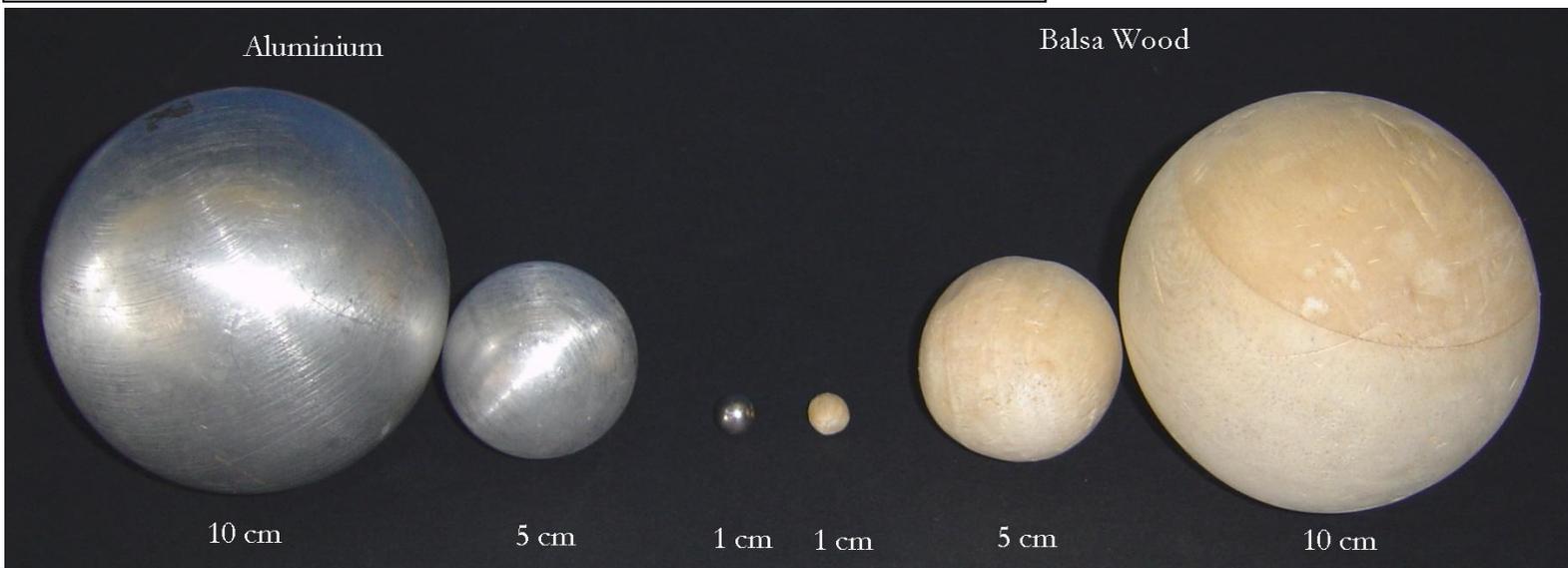
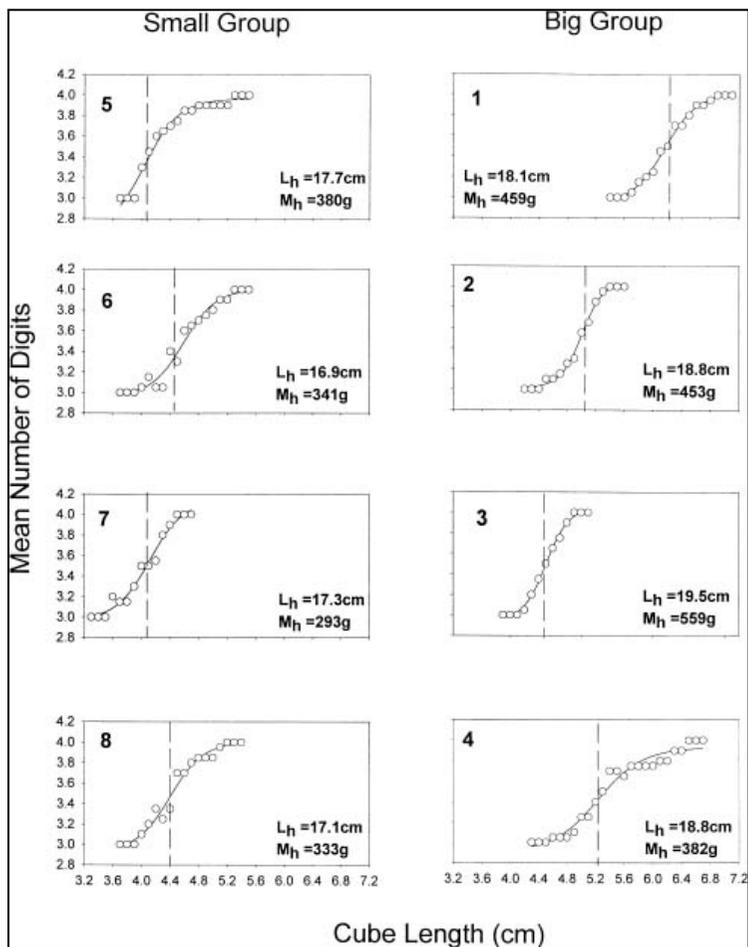


Figure 4



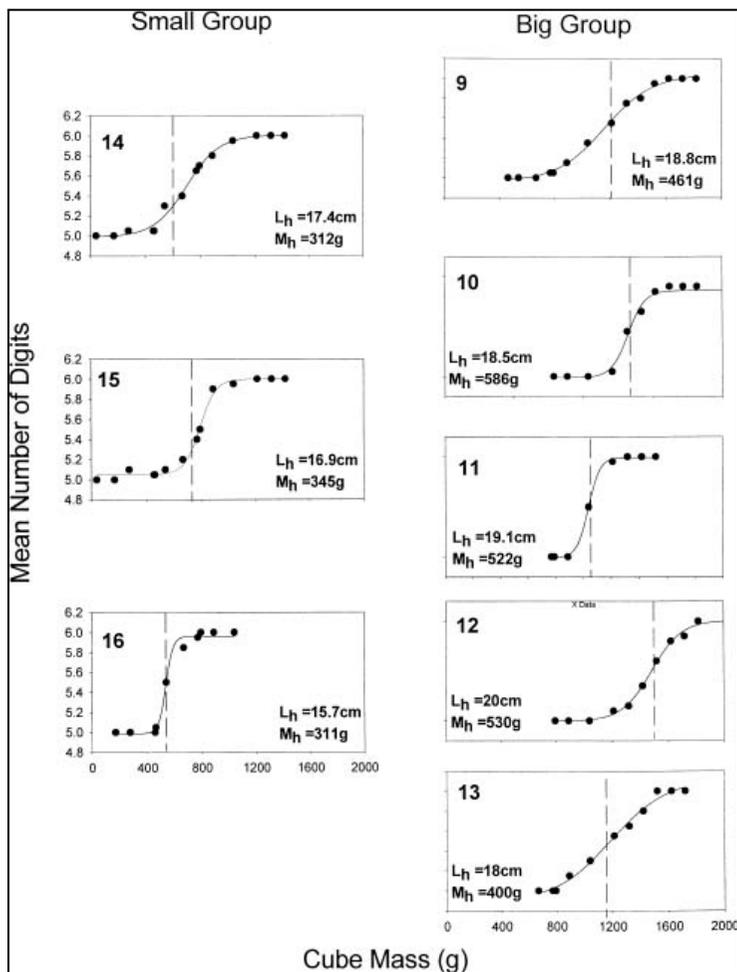
Body-Scaled Transitions in Human Grip Configurations.

Cesari, Paola; Newell, Karl

Journal of Experimental Psychology: Human Perception & Performance. 26(5):1657-1668, October 2000.

Figure 4 . Plots of the transition of grip configuration between three digits and four digits for the 8 participants (participant numbers are shown in upper left-hand corner of each panel). The data reflect the mean of the increasing and decreasing order of size conditions. The abscissa is the side length of the cubes (cm), and on the ordinate is the mean number of digits in the grip configurations. The data points are fitted with a four-parameters sigmoid curve. The four plots on the right side of the figure are of the participants in the big group; the four plots on the left side of the figure are of the participants in the small group. The individual hand length (L_h) and mass (M_h) are shown for each participant.

Figure 6

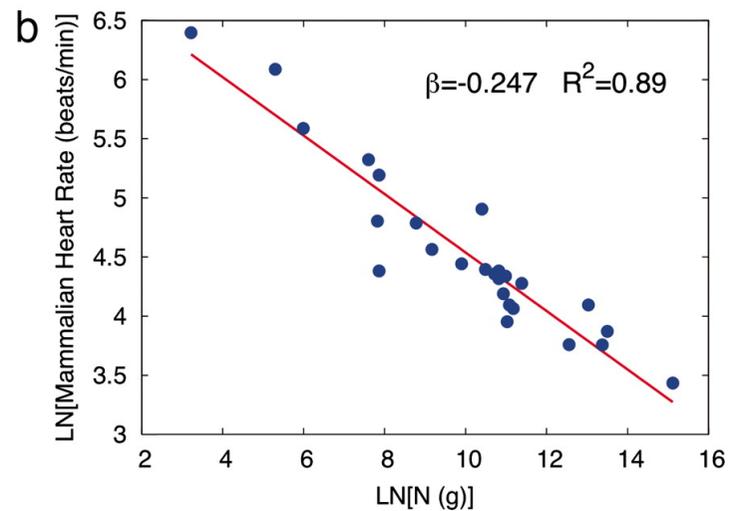
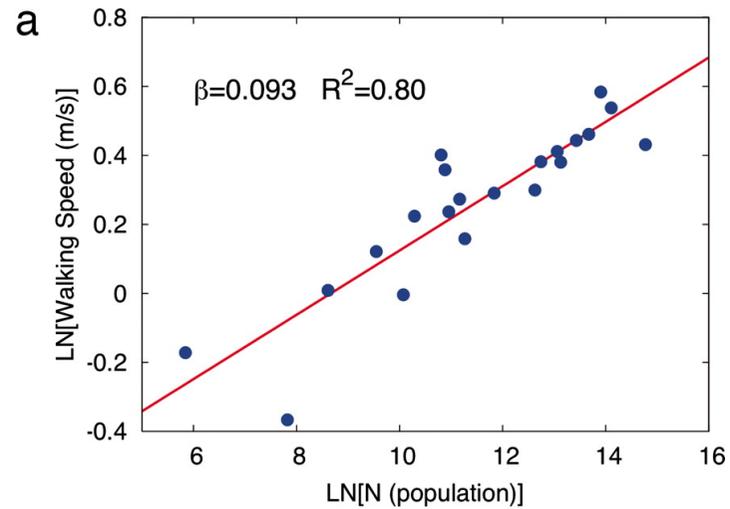


Body-Scaled Transitions in Human Grip Configurations.
 Cesari, Paola; Newell, Karl

Journal of Experimental Psychology: Human Perception & Performance. 26(5):1657-1668, October 2000.

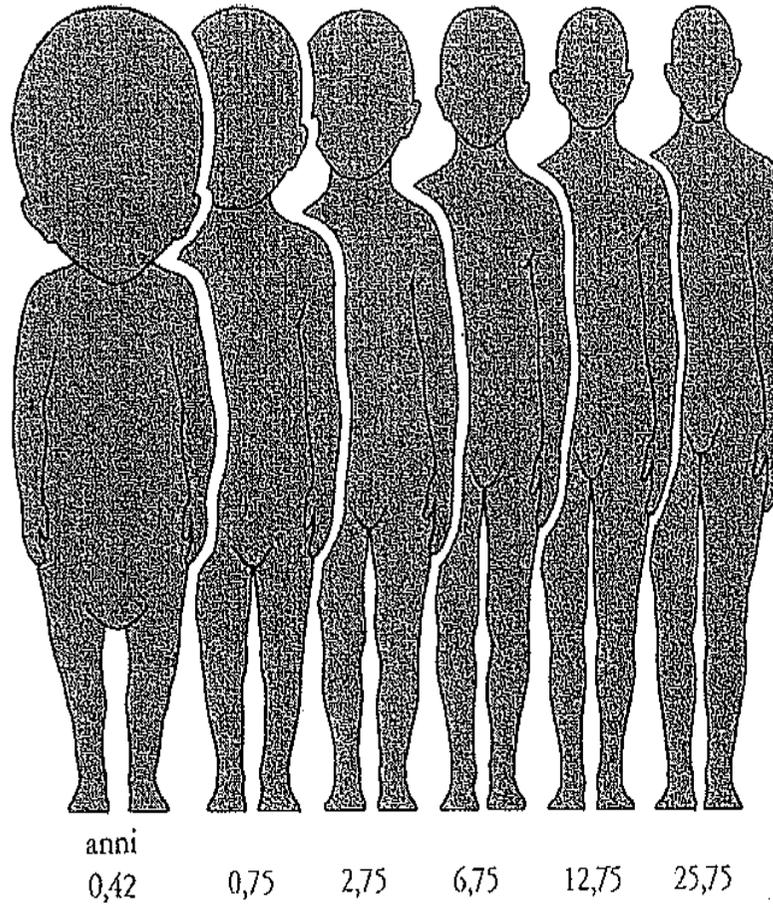
Figure 6 . Plots of the transition of grip configuration between five digits of one hand and two hands for 8 participants (participant numbers are shown in the upper left-hand corner of each panel). The data reflect the mean of the increasing and decreasing order of mass conditions. The abscissa is the mass of the cubes (g), and on the ordinate is the mean number of digits in the grip configurations. The five plots on the right side of the figure are of the participants in the big group; the three plots on the left side of the figure are of the participants in the small group. The individual hand length (L_h) and mass (M_h) are shown for each participant.

**La cadenza del passo aumenta all'aumentare della grandezza della città
il battito cardiaco diminuisce all'aumentare della grandezza dell'organismo**



Relazione allometrica

Lo sviluppo umano indica un cambiamento della forma corporea con il passare degli anni.

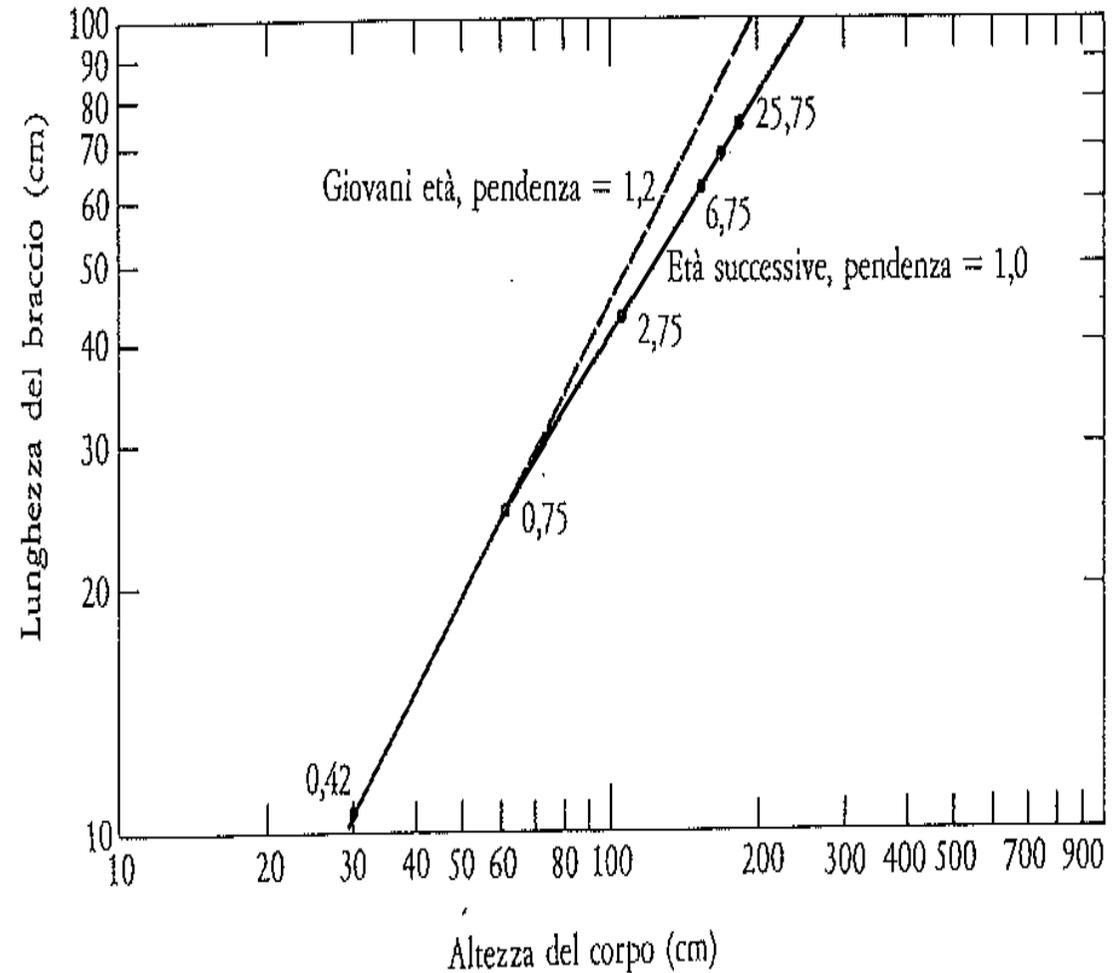


Relazioni allometriche

- Equazioni allometriche: “misure diverse”
- Supponiamo che le dimensioni di due parti di un organismo, x e y , siano legate da una certa relazione:
$$y = bx^a$$
- $Y = bx^a$ dove a e b sono costanti

Relazione allometrica

Lunghezza del braccio rispetto all'altezza del corpo, su un grafico allometrico. I punti, ripresi dall'illustrazione qui sopra, rappresentano le sei fasi dello sviluppo umano. Ai primi stadi corrisponde una retta con pendenza 1,2, più tardi la pendenza diventa 1,0. I numeri accanto ai punti si riferiscono all'età in anni.



Grandi e Piccoli

54

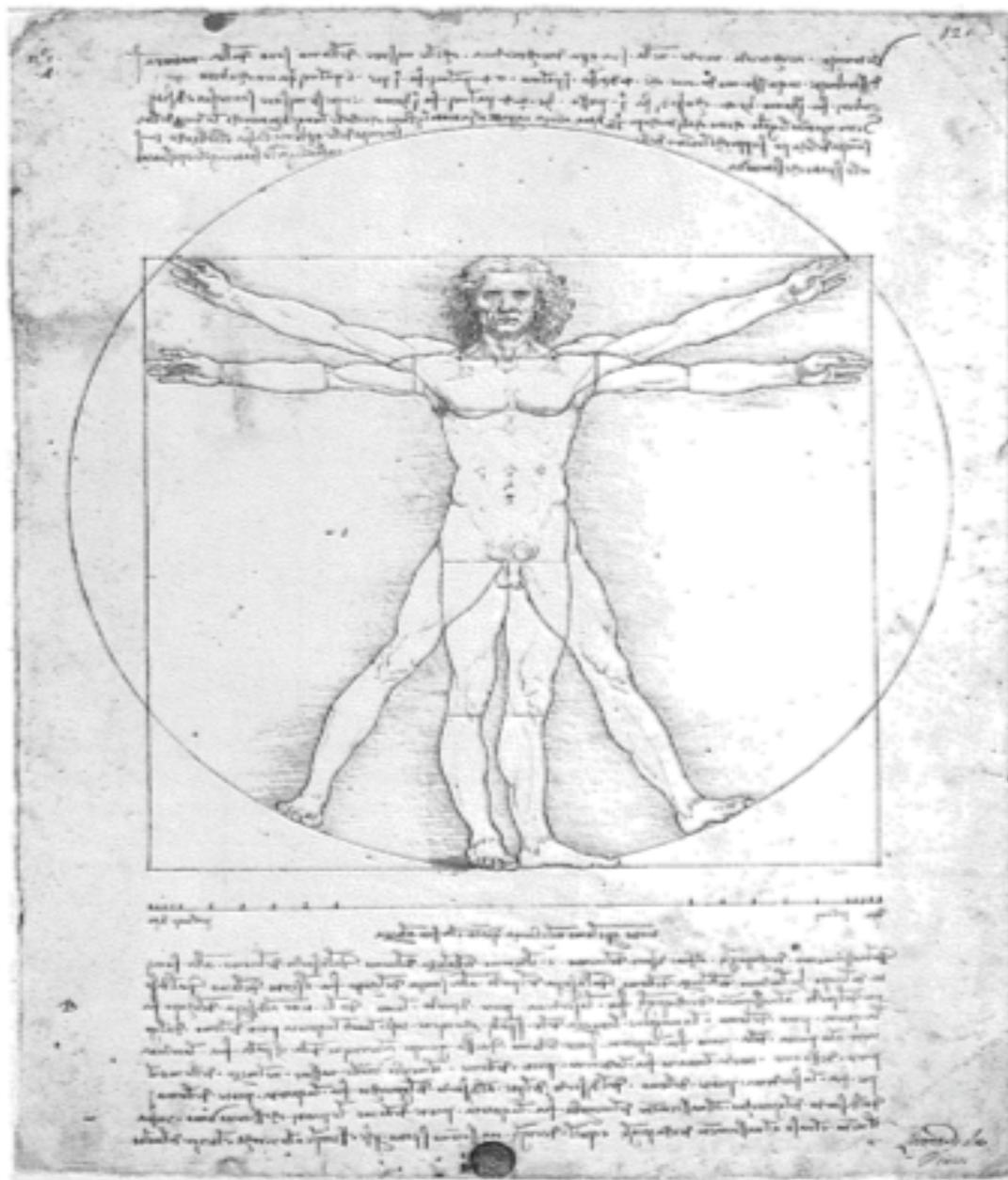
Robert Wadlow aveva vent'anni e misurava 2,7 m quando è stata scattata la fotografia, nel 1939. Suo padre era alto 1,79 m. Un funzionamento abnorme della ghiandola pituitaria può provocare il gigantismo nell'uomo. La crescita eccessiva si nota soprattutto nella testa e nelle gambe.



Relazioni isometriche

- Equazioni isometriche: con misure uguali
- quando l'esponente=1
- Supponi che:
- y =apertura delle braccia
- X = altezza degli umani adulti
- $a=1$
- In questo caso l'apertura delle braccia è direttamente proporzionale all'altezza del soggetto

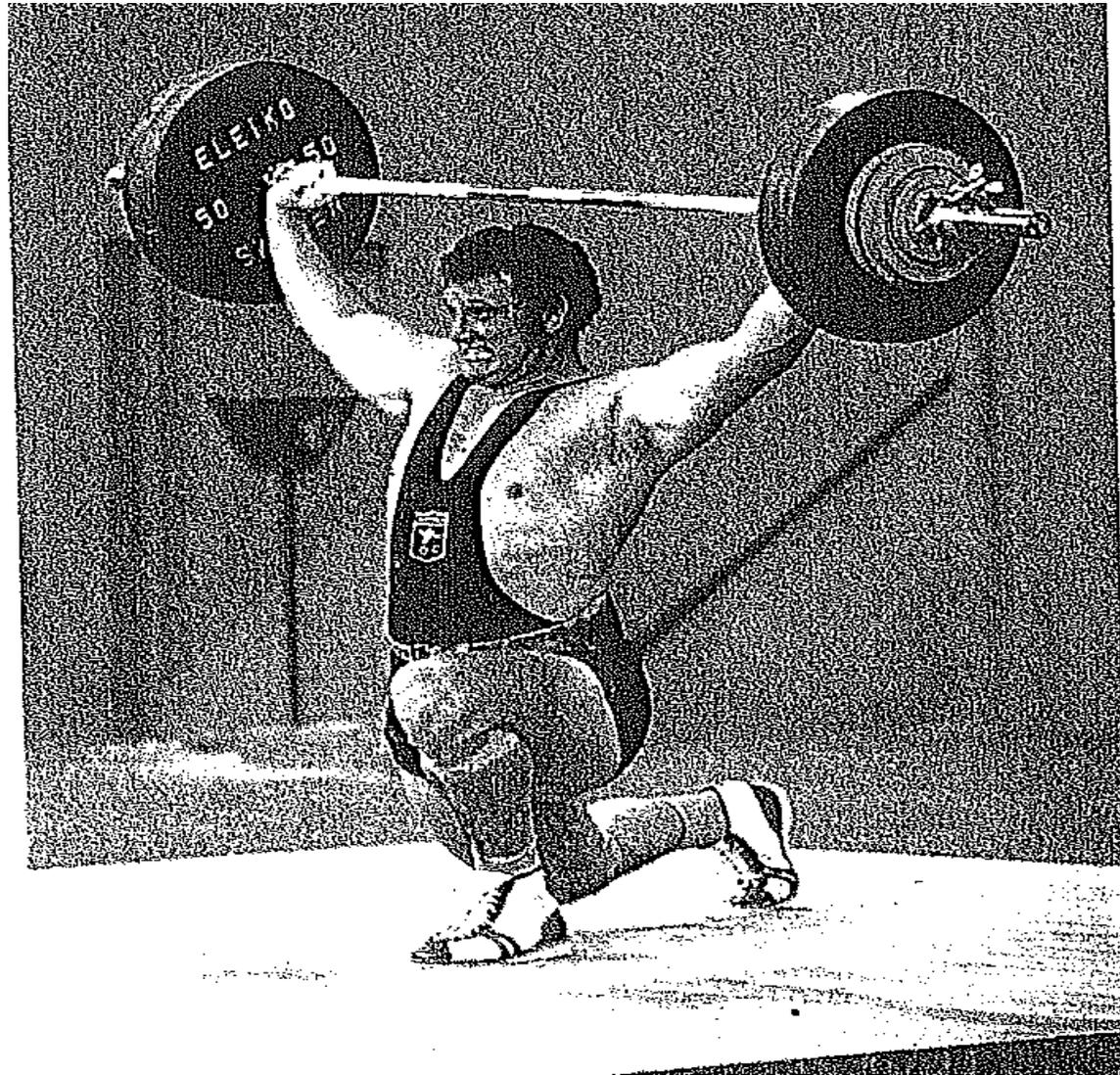
Uomo di Vitruvio, dai quaderni di Leonardo da Vinci.



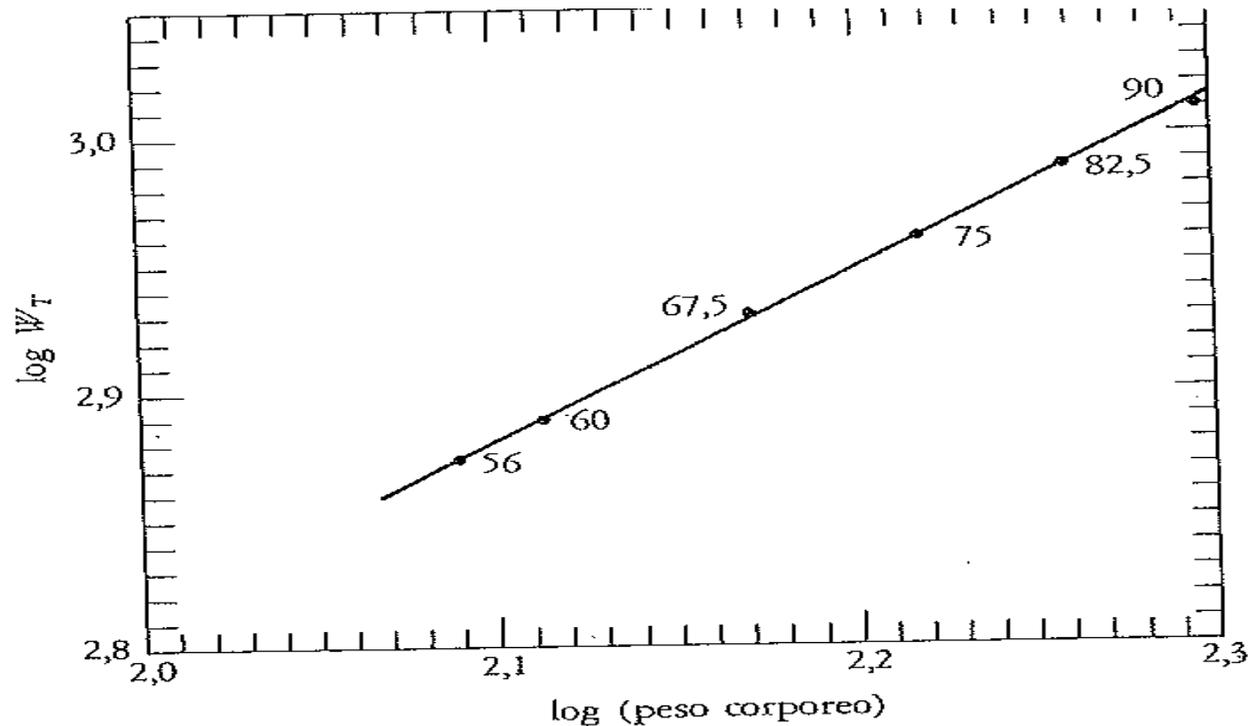
L'analisi dimensionale e il concetto di scala

- Considerare una formula a-dimensionale scalata significa utilizzare uno strumento matematico che misura ad esempio una funzione ma indipendentemente dalle dimensioni dei soggetti sotto esame, questo significa che:
 - Può essere applicato sia a persone grandi che a persone piccole poiché la loro grandezza è già presente nell'equazione come fattore scalato

Analisi dimensionale nello sport



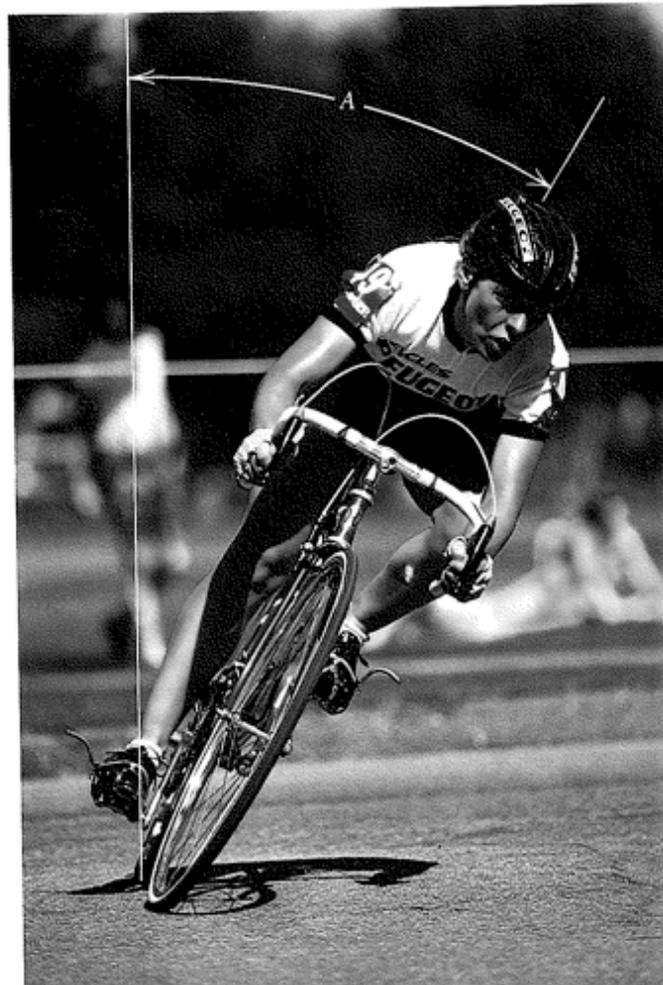
Sollevamento pesi



I record mondiali di sollevamento pesi, rappresentati da $\log W_T$ in funzione del logaritmo del peso corporeo. Qui W_T è il peso globale sollevato in tre prove: distensione, slancio e strappo. I numeri accanto a ogni punto indicano la categoria (espressa in kg).

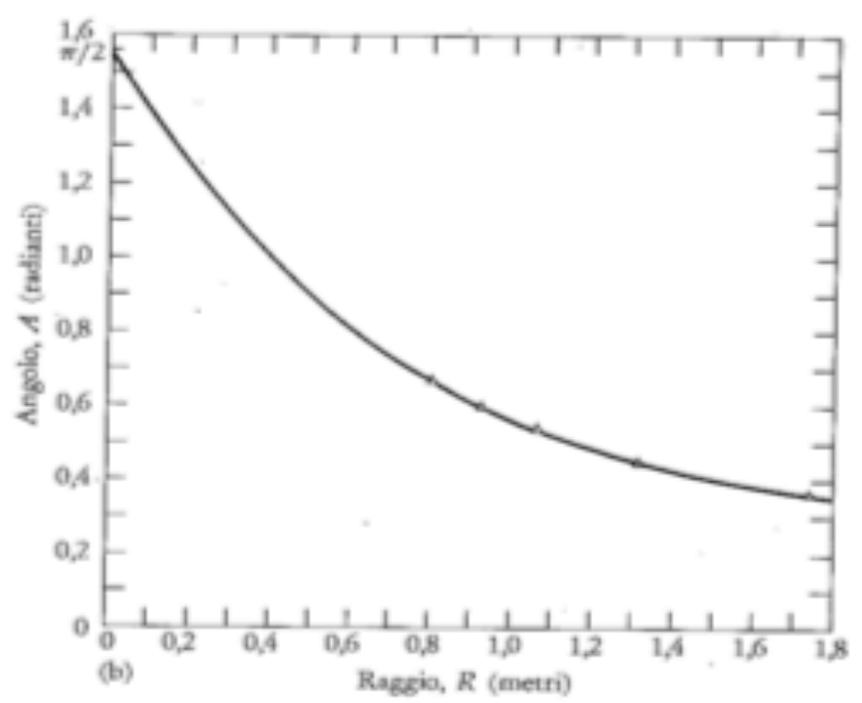
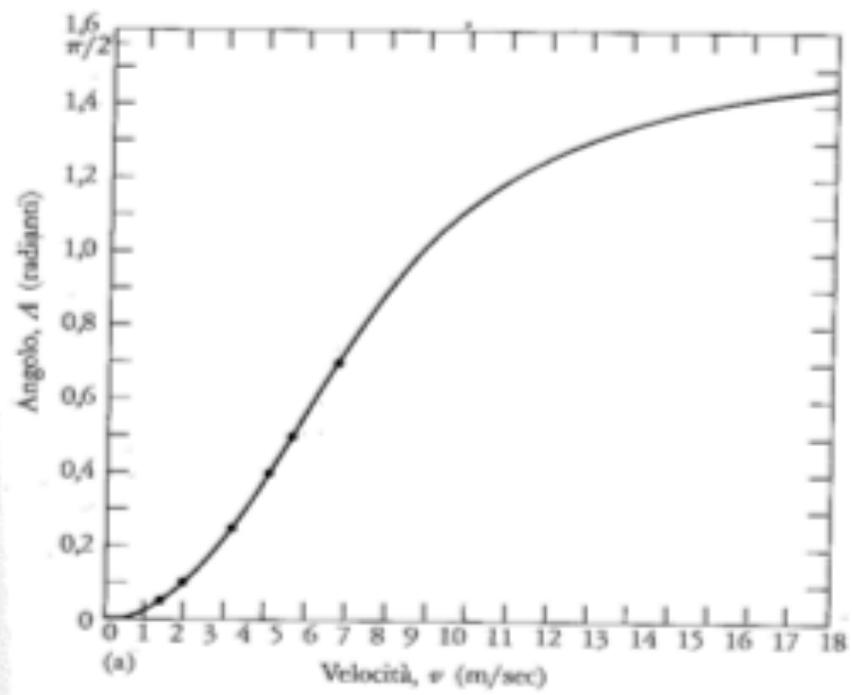
Relazioni fra più variabili

Una bicicletta che corre a velocità v su un cerchio di raggio R s'inclina di un angolo λ rispetto alla verticale.



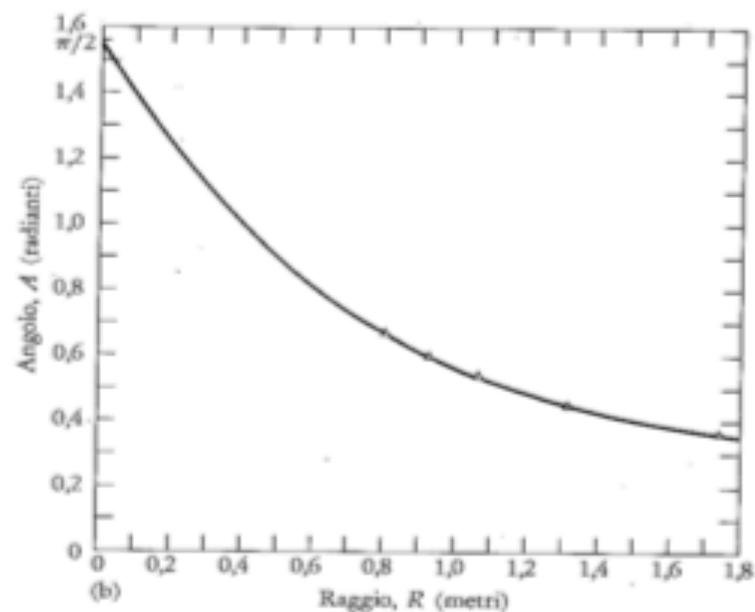
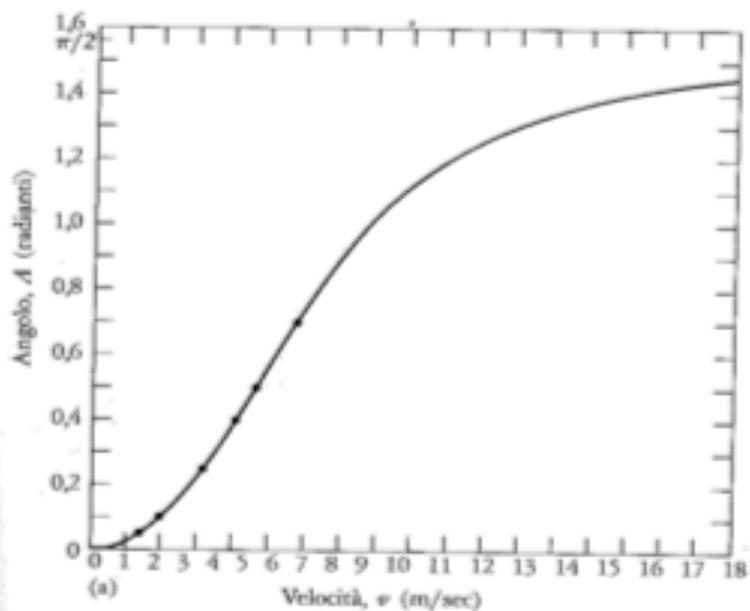
Pedalare in cerchio

- Mentre giriamo su di un cerchio di raggio R ad una velocità costante v la bicicletta si inclina di un angolo A
- Possiamo:
- 1- mantenere R costante e variare v
- 2- mantenere costante v e cambiare R
 - Dopo diverse misurazioni abbiamo due curve:
 - In una l'angolo A aumenta con v , nell'altra A diminuisce all'aumentare di R



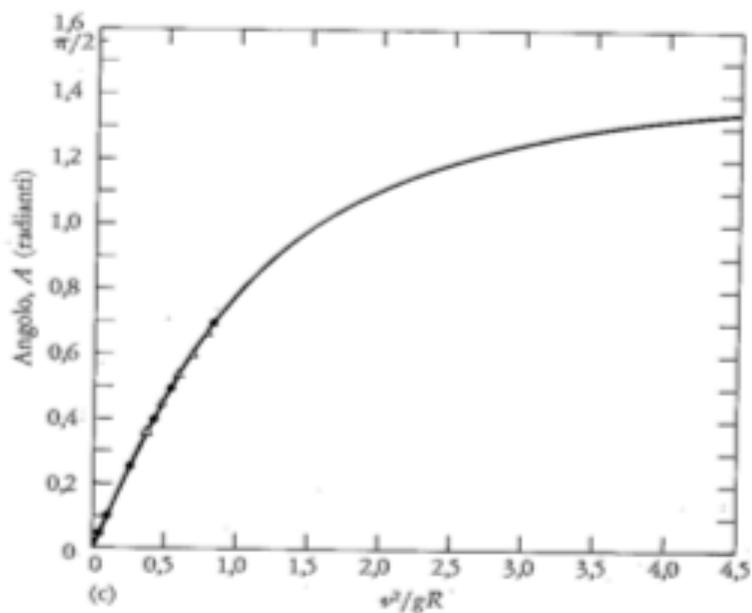
Come fare per calcolare A in funzione di v e di R ?

- Si dovrebbero fare un infinito numero di misure per ottenere un certo numero di curve e poi interpolarle fra loro!!!
- Troppo dispendioso!
- L'analisi dimensionale può risolvere il problema.



Schemi dei risultati ottenuti con gli esperimenti sulle biciclette: (a) angolo A riportato in funzione di v per R costante; (b) angolo A riportato rispetto a R per v costante; (c) angolo A riportato rispetto al gruppo adimensionale v^2/gR , in cui tutti i dati si dispongono su un'unica curva.

$$\frac{v^2}{gR}$$



Relazione a-dimensionale

- Numero puro: V^2/gR
- $V^2 = (L/T)^2$
- $g = L/T^2$
- $R = L$

$$\frac{v^2}{gR}$$

Tutte le dimensioni si elidono!

Quale la sua utilità?

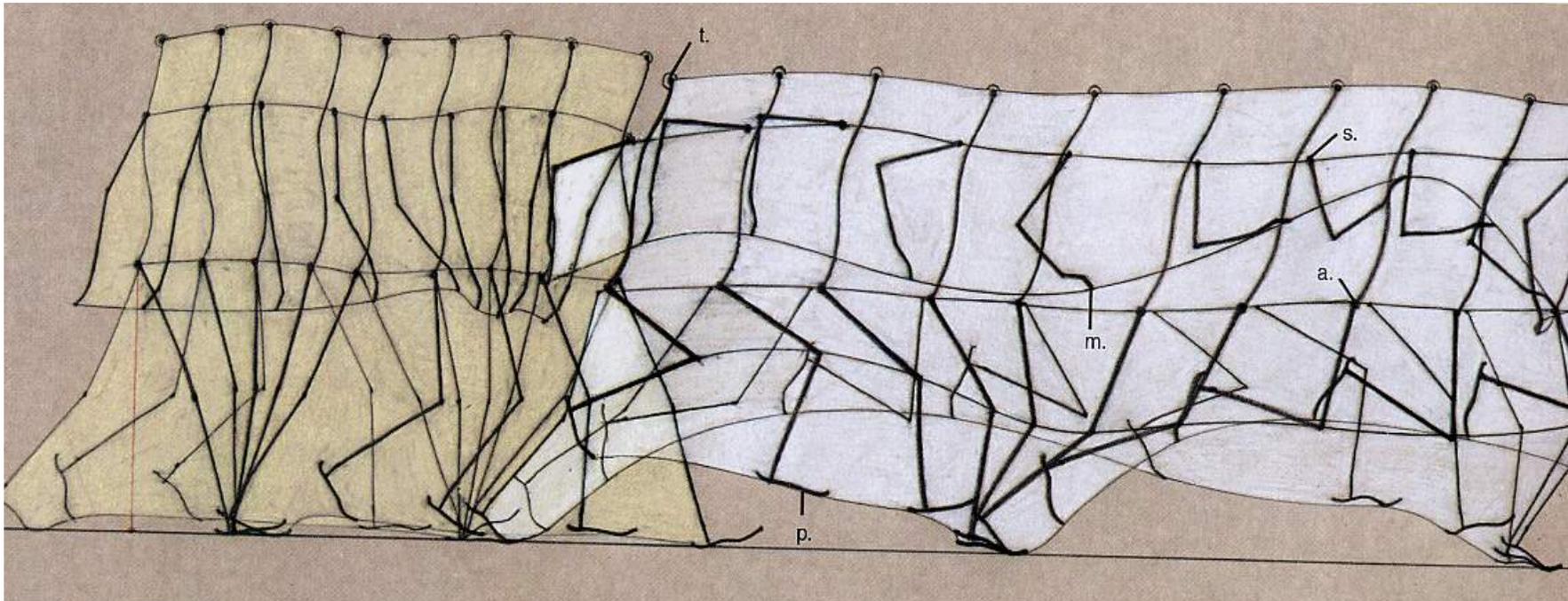
- Ora possiamo stabilire a caso i valori di v e R utilizzare la formula e dedurre A dal grafico
- Non siamo più costretti a fare un gran numero di esperimenti
- Inoltre abbiamo inserito g che ci permetterebbe di calcolare la relazione anche sulla luna!

Problema: Perché ad una certa velocità anziché camminare corriamo?

- Variabili importanti:
- Velocità (v)
- g (gravità)
- L lunghezza arto inferiore

- Perché dobbiamo correre anziché camminare più velocemente?
- I vincoli meccanici non ce lo permettono!
 - Se camminiamo aumentando sistematicamente la velocità, ad un certo punto siamo costretti a correre

Passaggio fra camminata e corsa



Analisi dimensionale

- Importanti variabili:

$$\frac{v^2}{gl}$$

Lunghezza arto inferiore
fattore che scala

- Velocità, accelerazione di gravità, altezza della persona

$$v^2 = \frac{L^2}{T^2}$$

$$\frac{L^2}{T^2} \frac{1}{L} \frac{T^2}{L} = \frac{L^2 T^2}{L^2 T^2}$$

$$g = \frac{v}{T} = \frac{L}{T^2}$$

Esempio

- Gravità $9,8 \text{ m/s}^2$ $\frac{L}{T^2}$
- Adulto arto inferiore 0.8 m (L)
- cambia camminata a corsa a 2,8 m/s
- Bambino arto inferiore 0.5m (L)
- cambia camminata a corsa a 2,2 m/s

Il cambio fra camminata e corsa

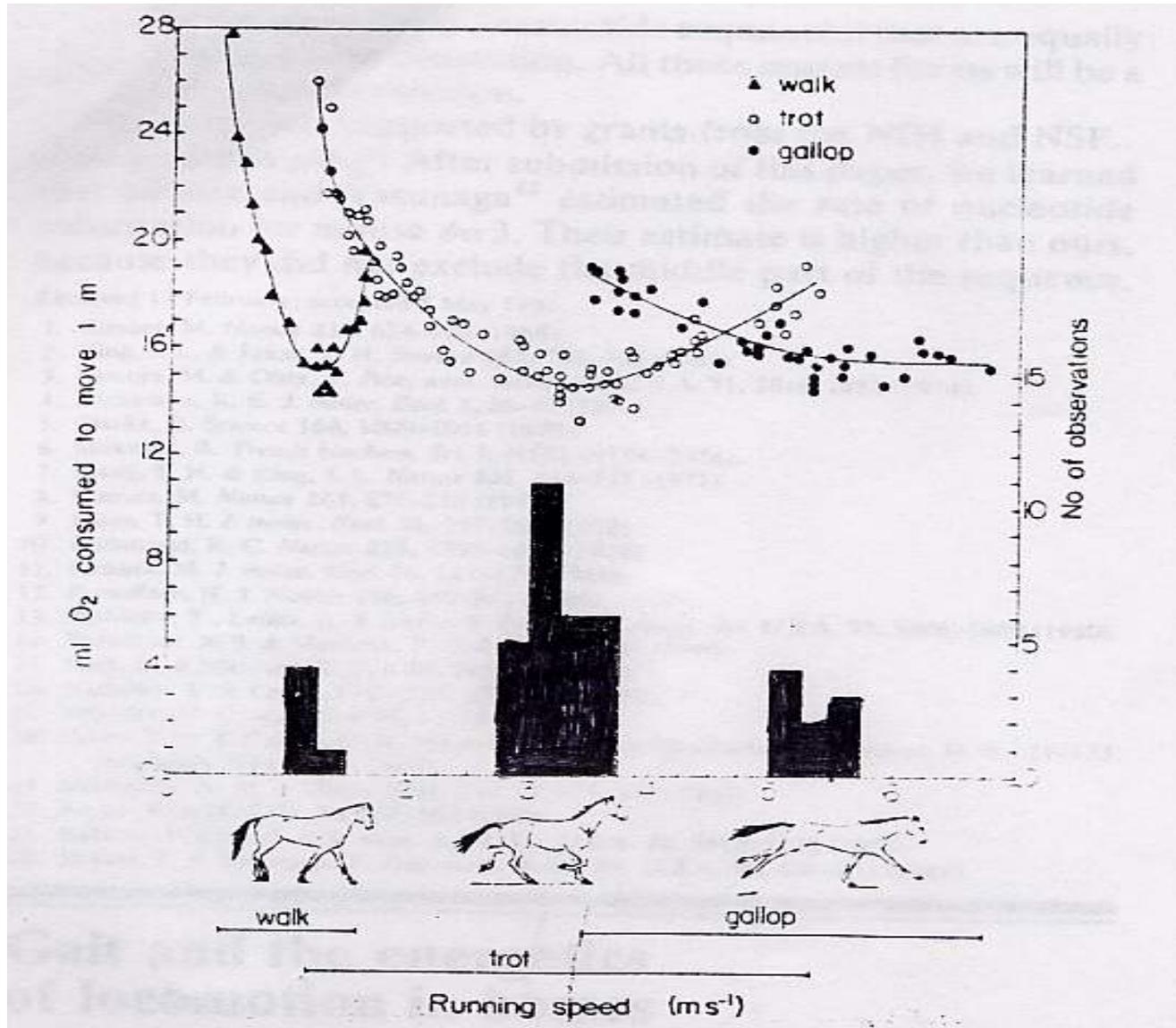
- I bambini cambiano pattern a velocità inferiori
- Così le persone piccole
- Che cosa fanno i marciatori?

$$\frac{v^2}{gl}$$

Camminata e vincoli energetici

- Il cambio fra un pattern di movimento ed un altro, è definito da vincoli anche energetici
- L'energia minima consumata è relativa alla velocità ed al pattern scelto
- Hoyt & Taylor (Nature, 1981)

Vincoli energetici



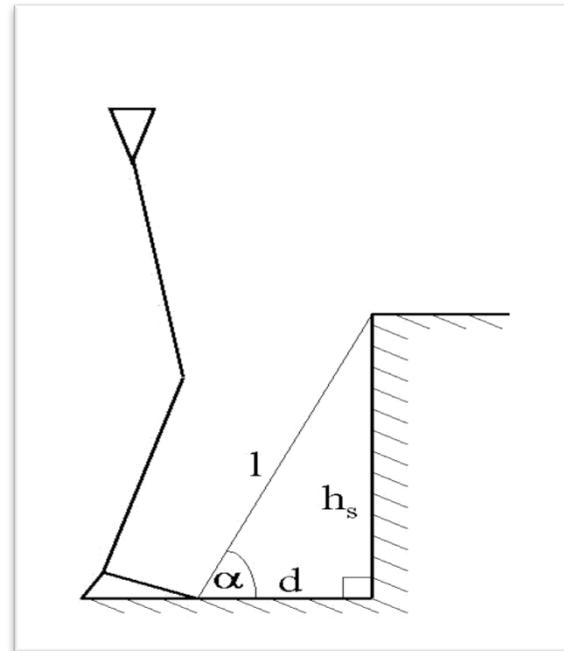
Implicazioni teoriche

- Dall'analisi dimensionale emerge che:
 - Parametri corporei scalano la velocità di movimento
 - Il movimento può essere definito da vincoli meccanici ed energetici
 - E i vincoli percettivi ed ambientali?

Salire e scendere le scale

La percezione delle capacità motorie

- Warren (1987): Lscalino/Lgamba
- Kontzac et al. (1992): anziani non seguono lo stesso rapporto scalare

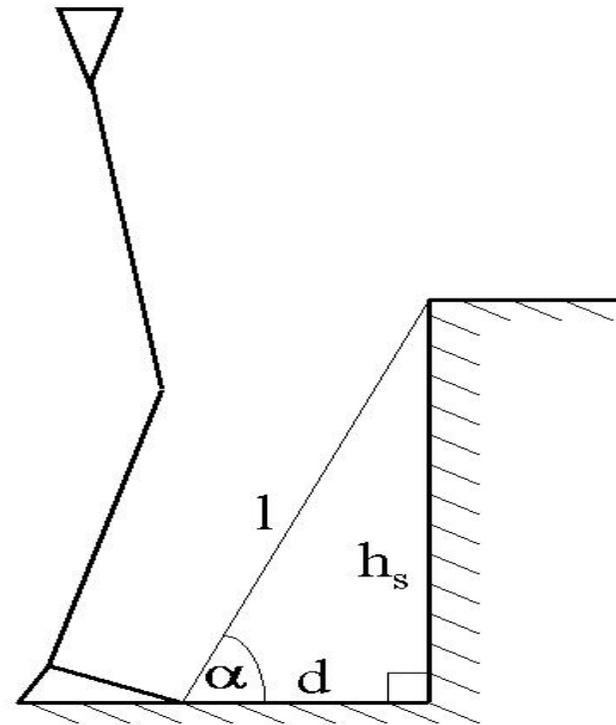


- Sappiamo scegliere correttamente il gradino più alto che siamo in grado di salire in base ai nostri parametri corporei e alle nostre capacità motorie?

Variabili da considerare

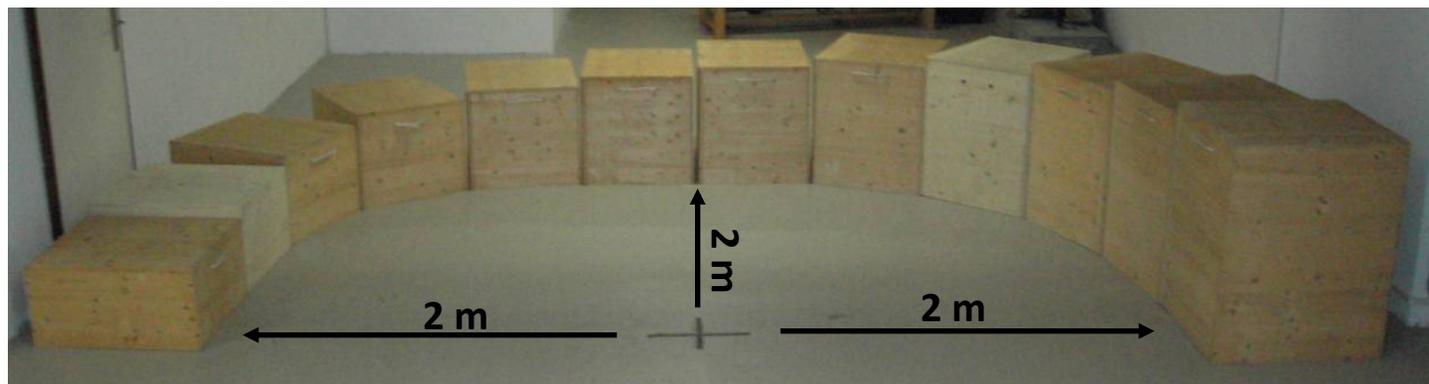
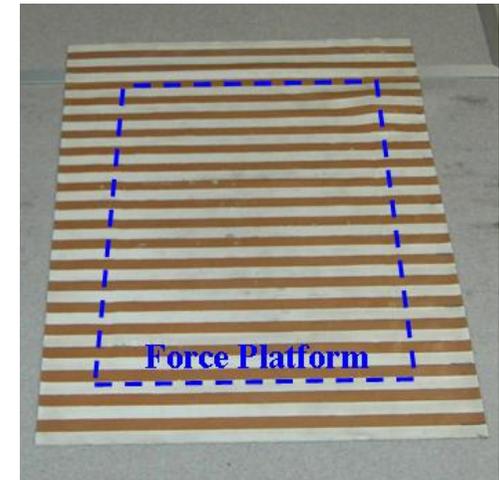
- Altezza gamba
- Altezza scalino- h_s
- Distanza dallo scalino- d
- Ipotenusa- l
- Angolo- α

$$\text{sen}\alpha = h_s / l = \text{Angolo } \alpha$$



Strumenti di misura

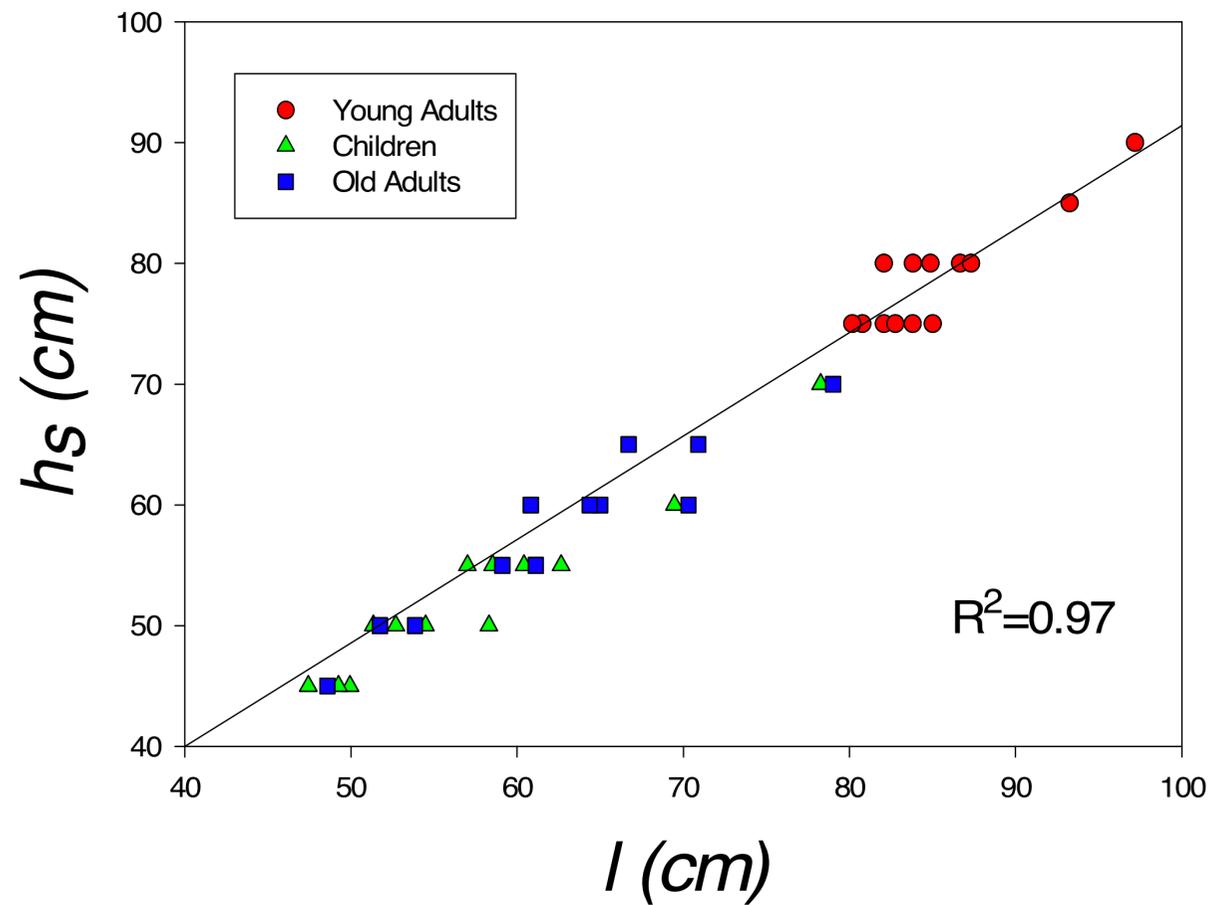
- 14 scalini in legno
 - Larghezza 50 cm, profondità 60 cm;
 - Altezza da un 35 a 90 cm, incremento di 5 cm;
 - Disposti a semicerchio in ordine crescente



Leg Length, Height Achieved and Perceived Scaled and not Scaled

Grou	Leg Length (cm)	Achieved (cm)	Perceived (cm)	Achieved/L	Perceived/L
Young					
M	78.5	79.2	72.7	1	0.93
<i>SD</i>	<i>2.4</i>	<i>4.4</i>	<i>4.8</i>	<i>0.05</i>	<i>0.06</i>
Older					
M	77.7	57.7	52.3	0.74	0.67
<i>SD</i>	<i>5.9</i>	<i>6.9</i>	<i>6.3</i>	<i>0.07</i>	<i>0.06</i>
Children					
M	57.7	52.6	50.7	0.89	0.88
<i>SD</i>	<i>7.7</i>	<i>6.9</i>	<i>8.8</i>	<i>0.07</i>	<i>0.15</i>

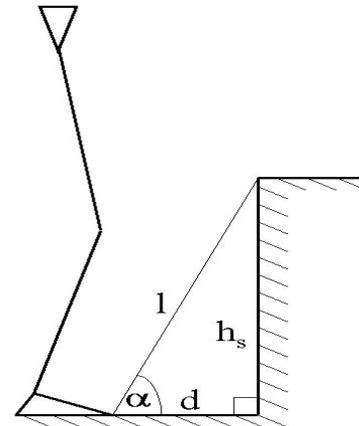
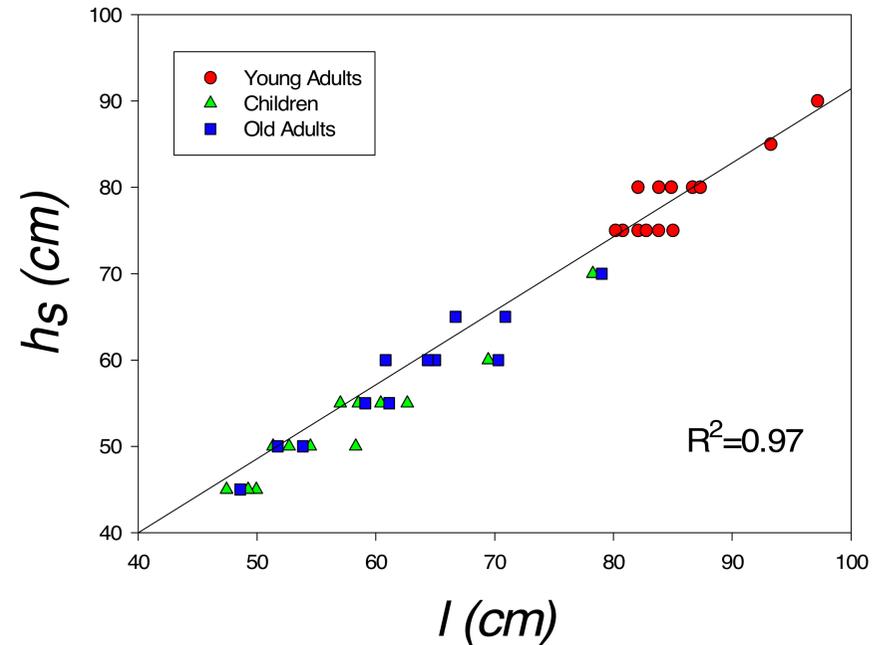
Relazione Ipotenusa/Altezza scalino



Come calcolare l'angolo α

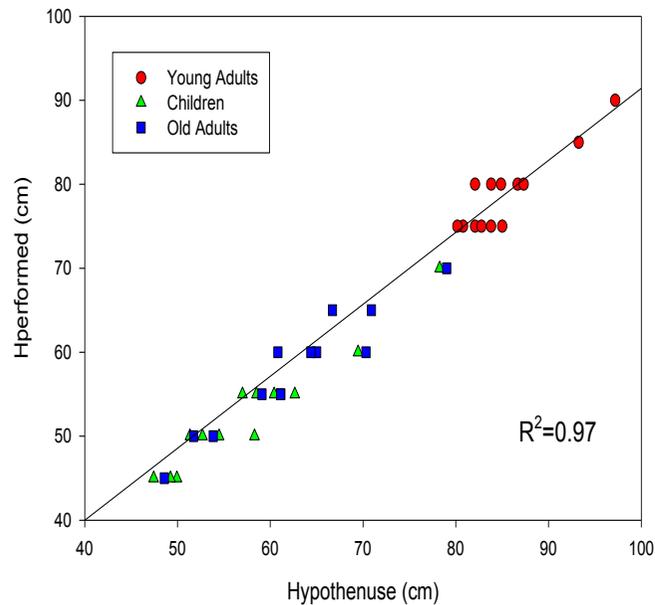
L'inclinazione
Della retta:
 h_s/I unità cm/cm

$$\mathbf{\text{sen}\alpha = h_s/I}$$



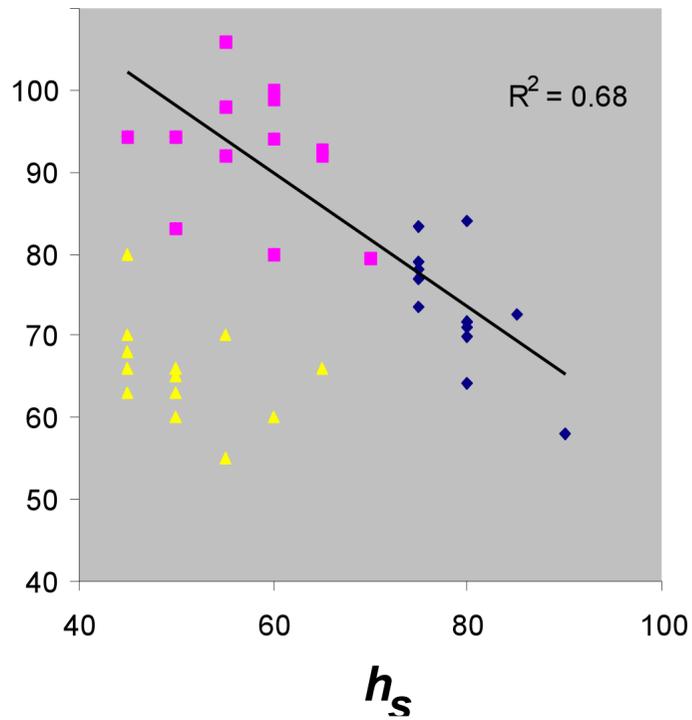
L'angolo α è una costante percettivo-motoria

- Il rapporto fra l'altezza salita e l'ipotenusa è fortemente lineare ($R^2=0.97$) quindi il valore della linea è da considerare costante quindi costante è l'angolo α

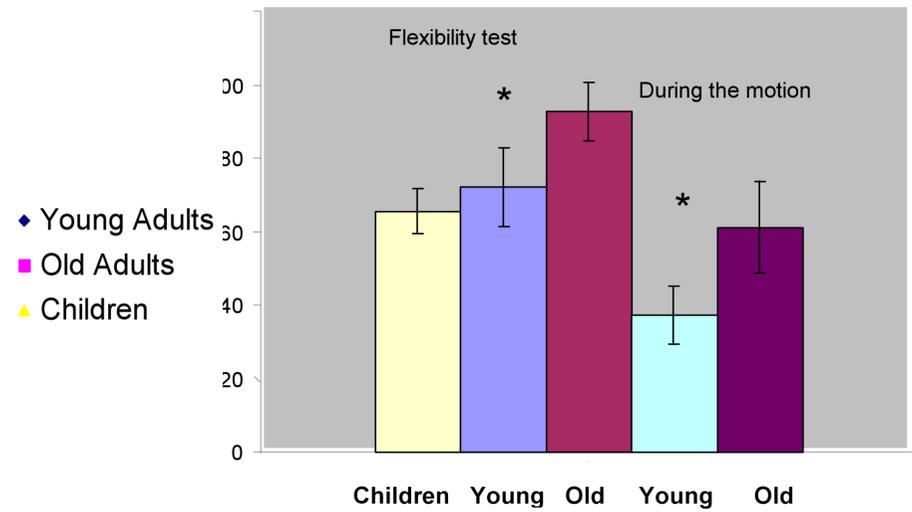


Flessibilità

Hip Angle (θ)



Angle (θ)



Discesa delle scale

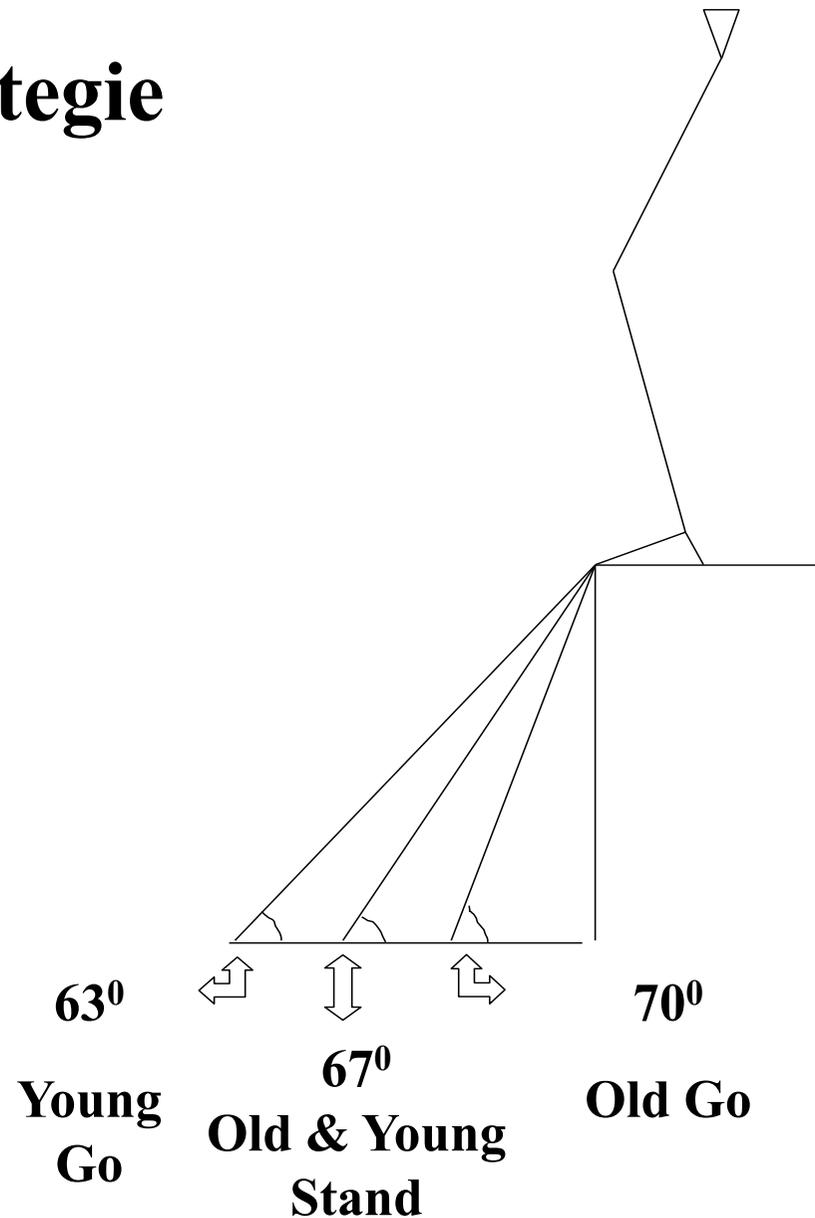
- 11 Anziani (età $M=61.6$, $SD=7.3$)
- 14 Giovani (età $M=22.4$, $SD=1.6$).
- Due condizioni:
 - Scendi e stai
 - Scendi e vai (raggiungi quel punto a 3m di distanza)

Discesa delle scale

- 11 Anziani (età $M=61.6$, $SD=7.3$)
- 14 Giovani (età $M=22.4$, $SD=1.6$).
- Due condizioni:
 - Scendi e stai
 - Scendi e vai (raggiungi quel punto a 3m di distanza)

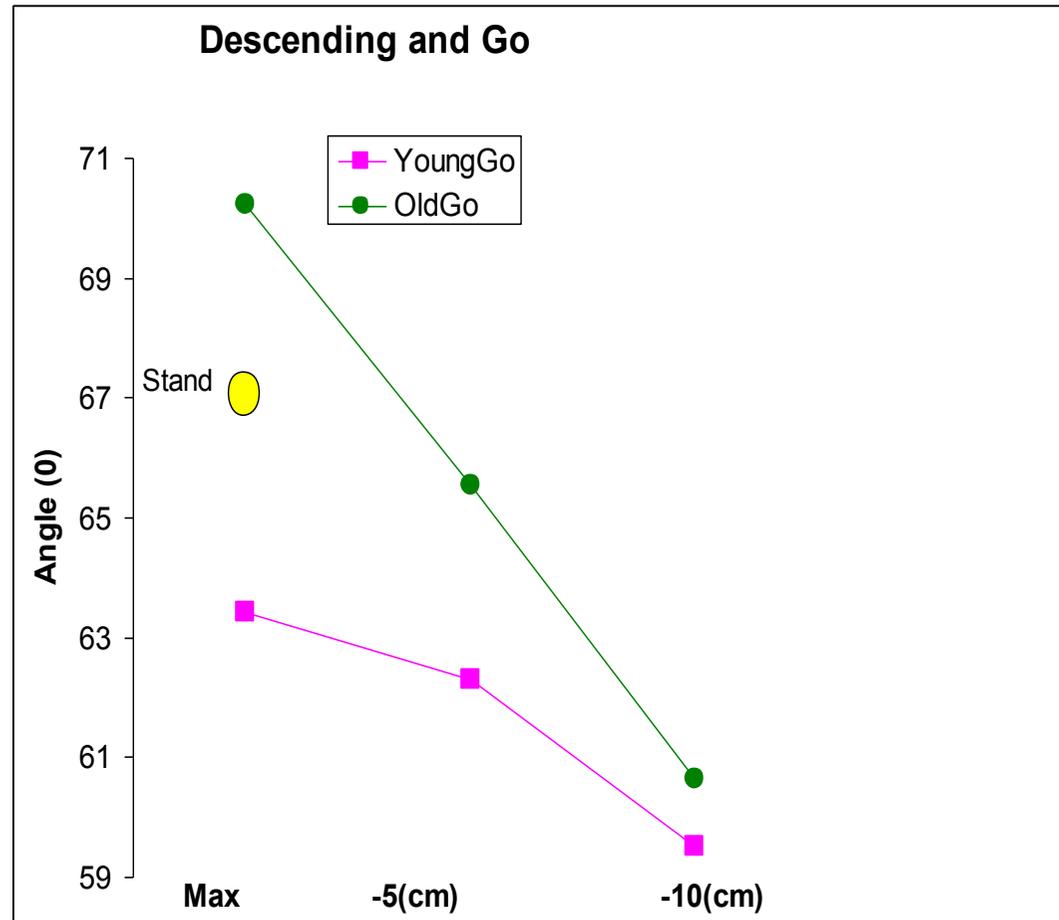
Le due strategie

- **Scendi e stai:** stesso angolo
- **Scendi e vai:** anziani atterrano più vicino allo scalino giovani più lontano



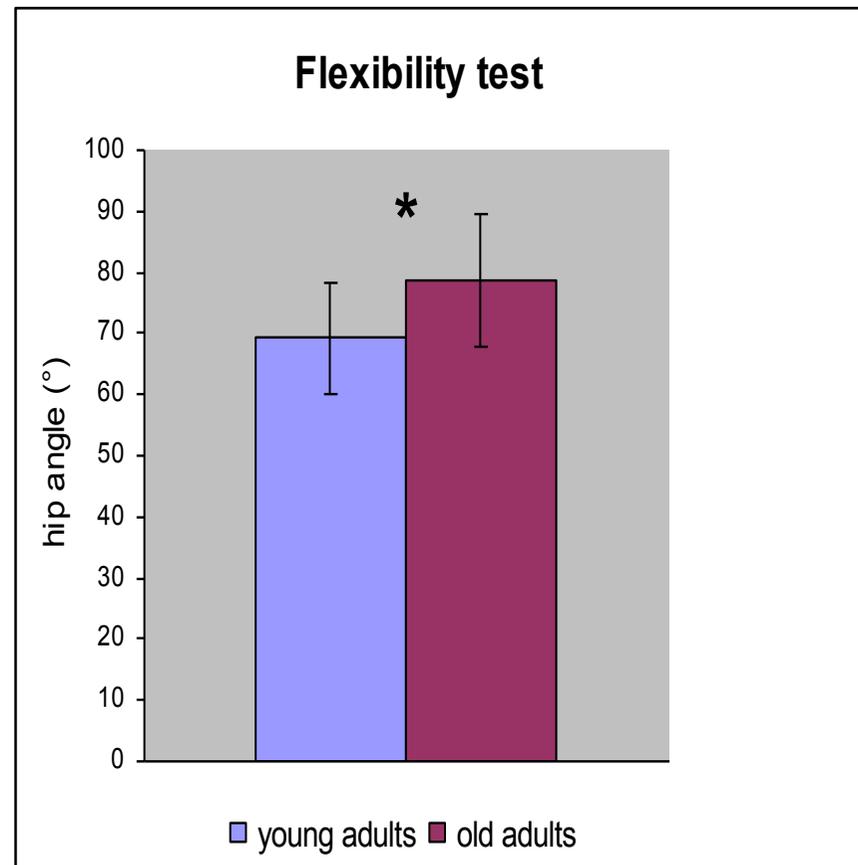
Le due strategie di movimento

- **Scendi e stai:** stesso angolo per i due gruppi
- **Scendi e vai:**
 - Diversi gli angoli fra anziani e giovani



Test di flessibilità

Anziani presentano una flessibilità al livello delle anche inferiore ai giovani



Salire e scendere le scale

- Per ambedue i compiti motori (salire o scendere) l'angolo rimane lo stesso
- Le altezze delle scale scelte per scendere sono inferiori sia per i giovani che per gli anziani rispetto alle scale scelte per salire
- Un diverso compito motorio (anzichè scendi e stai scendi e vai) comporta un aumento della difficoltà e un cambio generale della strategia motoria adottata.

Due strategie diverse

- Anziani più in difficoltà a gestire la loro quantità di moto: scelgono strategie più conservative per mantenersi più stabili

Riassumendo

- Dimensioni e unità di misura
- Dimensioni unità di misura \rightarrow formule
- Formule consistenti \rightarrow a-dimensionali
- Concetto di scala
- Forme simili e funzioni scalate
- Forme simili e azioni scalate