URTI: Collisioni o scontro fra particelle libere [e vincolate].

Due punti materiale (o corpi estesi) collidono quando durante il loro moto si vengono a trovare nello stesso punto (o regione) dello spazio, che pertanto è comuna alla traiettoria dei due punti (corpi).

Approssimazione di impulso: l'interazione fra le due particelle e/o corpi è pressoché istantanea e l'azione delle forze esterne, che eventualmente agiscono durante l'intervallo di tempo infinitesimo in cui l'urto avviene, NON è tale da cambiare lo stato di moto del sistema delle due particelle nel suo insieme.

In un urto impulsivo, quindi, lo stato di moto del centro di massa NON cambia durante l'urto, dato che le forze interne non sono in grado di variare la quantità di moto del sistema e neppure le forze esterne, non avendo carattere impulsivo, sono in grado di farlo.

Si tratta di studiare il moto del sistema dopo l'urto, cioè il moto del CM del sistema e delle due particelle relativamente al CM, sfruttando opportunamente i teoremi di Konig.

Generalmente si conosce lo stato (masse + velocità) delle particelle (e/o corpi) prima dell'urto e si tratta di trovare lo stato di moto (masse + velocità) delle particelle dopo l'urto.

Ipotesi: per le nostre applicazioni assumeremo che le masse delle particelle individuali (o dei due corpi) non varino durante l'urto, e quindi, nei casi di urto che ci interessano, si tratta di determinare le velocità delle particelle o dei due corpi subito dopo l'urto.

Due classi di fenomeni:
A) Urti tra due particelle libere (sistema isolato) o non vincolate, in assenza di risposte impulsive derivanti dalla presenza di forze esterne agenti su una o entrambe le particelle durante l'urto;

B) Urti tra una particella libera e un corpo vincolato, con sviluppo di eventuale risposta impulsiva da parte del vincolo, dovuta alle forze esterne agenti sul corpo vincolato.

A) Caso di corpi e/o particelle libere o soggette a forze esterne non impulsive.

Nel caso di urto tra due particelle (o corpi) che formano un sistema isolato si ha la conservazione della quantità di moto totale del sistema, dato che entrano in gioco solo forze interne, e queste come, si sa dalla dinamica dei sistemi di particelle, non sono in grado di far variare la quantità di moto totale del sistema..

N.B: La quantità di moto totale del sistema si conserva durante l'urto anche nel caso di sistema non isolato se le forze esterne non sono impulsive.

$\Rightarrow$ Es. pendolo balistico, con filo ancorato al punto O, urtato da una particella che, al momento dell'urto, ha la velocità diretta perpendicolarmente al vincolo (filo che sorregge il pendolo).

B) Nei casi di urto tra una particella libere e un corpo vincolato, se durante l'urto le forze esterne sono impulsive, non si conserva la quantità di moto totale del sistema, dato che nell'urto entrano in gioco oltre a forze interne che sono sicuramente impulsive, anche forze esterne (dovute alla reazione vincolare) avente carattere impulsivo (i.e. la risposta del vincolo è impulsiva) e queste ultime determinano una variazione della quantità di moto totale del sistema durante l'urto, in accordo con il teorema dell'impulso.

Es. pendolo balistico, con asta incernierato in O, urtato da una particella che, al momento dell'urto, ha una velocità diretta trasversalmente al vincolo (asta rigida che sorregge il pendolo).

In questi casi, per risolvere il problema della determinazione delle velocità delle particelle dopo l'urto, si ricorre alla conservazione del momento della quantità di moto totale $\mathbf{L}_{O,S}$ del sistema durante l'urto rispetto al punto O in cui è imperniata una delle 2 particelle .

N.B.: In generale, nel caso di urto fra una particella e un corpo o una particella vincolato si conserva <u>in generale</u> il momento della quantità di moto del sistema, ma non la sua quantità di moto.

Urti centrali fra particelle (e/o corpi) libere nel sistema L

<u>Definizione di urto centrale</u>: quando la velocità relativa delle due particelle sia prima dell'urto che dopo l'urto è diretta lungo la retta congiungente le due particelle, si parla di un urto centrale, cioè di urto in una dimensione.

<u>Urto non-centrale (o urto piano)</u>: quando la velocità relativa delle due particelle dopo l'urto non è diretta lungo la retta congiungente le due particelle si parla di un urto non centrale, cioè di urto in due dimensioni (o di urto piano).

In generale, durante un urto tra due particelle libere (o soggette a forze esterne non impulsive) si conserva la quantità di moto totale:

$$\mathbf{P}_{S,p} = \mathbf{P}_{S,d}$$

cioé:

$$m_1\mathbf{v}_{1,p} + m_2\mathbf{v}_{2,p} = m_1\mathbf{v}_{1d} + m_2\mathbf{v}_{2d} \qquad (1)$$

N.B.: La (1) è un'equazione vettoriale con due (1+1) incognite $\mathbf{v}_{1d}$ e $\mathbf{v}_{2d}$, che nel caso di urto centrale <u>origina 1 sola equazioni scalare in due incognite ,</u> e quindi il problema della determinazione di $\mathbf{v}_{1d}$ e $\mathbf{v}_{2d}$ <u>non può essere risolto univocamente</u> usando solamente la conservazione della quantità di moto totale $\mathbf{P}_S$ del sistema.

Per poter risolvere in modo univoco il problema, bisogna trovare una condizione aggiuntiva alla conservazione della quantità di moto del sistema durante l'urto e che viene di solito fornita dalla relazione che lega l'energia cinetica totale del sistema subito prima dell'urto e subito dopo l'urto.

N.B.: Nel caso di urto non centrale (i.e.: urto piano), la (1) genera due equazioni scalari: una per la componente lungo l'asse x e l'altra per la componente lungo l'asse y.

Cosa succede all'energia cinetica $E_{k,S}$ del sistema prima e dopo l'urto? L'energia cinetica totale $E_{k,S}$ del sistema:

– si conserva solo nel caso di urto elastico (in questo caso le forze interne che entrano in gioco durante l'urto sono conservative);
– ma NON non si conserva nel caso di urto anelastico (le forze interne che entrano in gioco durante l'urto non sono conservative).

1) Urti anelastici. Energia dissipata nell'urto: $E_D = -\Delta E_k$.

La variazione di energia cinetica è detta anche Q–valore.

Nel caso di urto completamente o perfettamente anelastico, dopo l'urto le due particelle rimangono attaccate insieme e si muovono con la velocità del centro di massa, e quindi sarà $E_{K,S,d} = E_{k,CM,p}$ dato che la velocità del CM è la stessa prima e dopo l'urto.

N.B.: Urto completamente anelastico: ($E_{k,d}^{INT} = 0$, $Q = E_{k,p}^{INT}$)

Conservazione della sola quantità di moto:

$$\mathbf{P}_{S,p} = \mathbf{P}_{S,d} \quad \Rightarrow \quad m_1\mathbf{v}_{1,p} + m_2\mathbf{v}_{2,p} = (m_1 + m_2)\,\mathbf{v}_{CM}$$

che nel caso di urto centrale si reduce a 1 equazione scalare.

L'energia cinetica totale $E_{k,S}$ del sistema non si conserva, ma si conserva l'energia cinetica $E_{k,CM}$ del centro di massa. Quindi in un urto anelastico, tutta l'energia cinetica interna del sistema prima dell'urto viene dissipata durante l'urto anelastico stesso.

Quindi E_D corrisponde alla variazione di energia cinetica:

$$E_D = (½m_1v_{1,d}^2 + ½m_2v_{2,d}^2) – (½m_1 v_{1,p}^2 + ½m_1 v_{2,p}^2) = – ½ \mu v_{12}^2$$

Infatti è:

$$E_D = ½(m_1 + m_2)v_{CM,d}^2 – [½(m_1 + m_1) v_{CM,p}^2+½(m_1 v'_{1,p}{}^2+m_1 v'_{2,p}{}^2)]$$
$$= – ½[m_1m_2/(m_1+m_2)]v_{12,p}^2 = – ½ \mu v_{12,p}^2 = – E_{k,p}^{INT}$$

Di fatto, per l'energia dissipata, si ha:

$$E_D = E_{k,d} – E_{k,p} = – E_{k,p}^{INT}$$

Esercizi sull'urto centrale perfettamente anelastico:

1) proiettile di massa m sparato con velocità orizzontale $\mathbf{v}_0$ contro blocco di legno di massa M (>>m) vincolato a una fune di lunghezza L, posto in configurazione di equilibrio statico (pendolo balistico): calcolo della quota h_{max} raggiunta dal sistema m+M dopo l'urto impulsivo, supposto completamente anelastico .

2) particella di massa *m* lasciata cadere da un'altezza h_0 su una piastra di massa *M* che si trova in posizione di equilibrio sopra una molla di costante elastica k. Studiare il moto successivo del sistema m+M, assumendo che l'urto sia completamente anelastico.

2) Urti centrali elastici: $E_{K,p} = E_{K,d}$ (i..e.: Q = 0) e quindi:

Nel caso di urto elastico si conserva l'energia cinetica del sistema:

$$½m_1 v_{1,p}^2 + ½m_2 v_{2,p}^2 = ½m_1 v_{1,d}^2 + ½m_2 v_{2,d}^2 \qquad (2)$$

Questa è la seconda equazione scalare da accoppiare alla:

$$m_1\mathbf{v}_{1,p} + m_2\mathbf{v}_{2,p} = m_1\mathbf{v}_{1d} + m_2\mathbf{v}_{2d} \qquad (1)$$

(che va proiettata lungo l'asse che individua la direzione del moto delle due particelle che si urtano centralmente) per risolvere il problema della determinazione di $v_{1,d}$ e $v_{2,d.}$

Da (1) si ha: $$m_1(v_{1,p} - v_{1d}) = m_2(v_{2d} - v_{2,p}) \qquad (1')$$

Da (2) si ha: $\frac{1}{2}m_1 (v_{1,p}^2 - v_{1,d}^2) = \frac{1}{2}m_2 (v_{2,d}^2 - v_{2,p}^2)$, cioé

$$m_1 (v_{1,p} - v_{1,d}) (v_{1,p} + v_{1,d}) = m_2 (v_{2,d} - v_{2,p}) (v_{2,d} + v_{2,p})$$

e ricordando la (1') si ha: $(v_{1,p} + v_{1,d}) = (v_{2,d} + v_{2,p})$, e quindi:

$$v_{1,d} - v_{2,d} = v_{2,p} - v_{1,p} \qquad (3)$$

In un urto centrale elastico la velocità di avvicinamento prima dell'urto è opposta alla velocità di allontanamento dopo l'urto.

Risolvendo ora il sistema di equazioni la (3) e la (1'):

$$v_{1,d} - v_{2,d} = v_{2,p} - v_{1,p} \qquad (3)$$

$$m_1(v_{1,p} - v_{1d}) = m_2(v_{2d} - v_{2,p}) \qquad (1')$$

si ottengono le velocità delle particelle dopo l'urto:

$$v_{1d} = [(m_1 - m_2) v_{1p} + 2 m_2 v_{2p}]/(m_1 + m_2) \qquad (4)$$

e

$$v_{2d} = [(m_2 - m_1) v_{2p} + 2 m_1 v_{1p}]/(m_1 + m_2) \qquad (5)$$

Casi particolarmente interessanti:

1) masse uguali $m_1 = m_2$: dalle (4) + (5) si ha:

$$v_{1d} = v_{2p}$$

$$v_{2d} = v_{1p}$$

cioé durante l'urto i due corpi si scambiano le velocità.

2) massa m_2 inizialmente in quiete: dalle (4) + (5) si ha:

$$v_{1d} = [(m_1 - m_2)/(m_1+m_2)]v_{1p}$$

$$v_{2d} = [2m_1/(m_1+m_2)]v_{1p}$$

a) se $m_1 = m_2$ si ha $v_{1d} = 0$ e $v_{2d} = v_{1p}$

b) se $m_1>m_2$, allora v_{1d} e v_{2d} hanno lo stesso segno ma $v_{2d} > v_{1d}$, cioé la particella urtante procede anche dopo l'urto nel verso iniziale ma con velocità minore;

c) se $m_1<m_2$, allora $v_{1d} <0$ ed è in modulo $< v_{1p}$, cioé la particella di massa m_1 rimbalza con velocità ridotta.

d) se $m_2 = \infty$, $v_{2d} = 0$ e $v_{1d} = - v_{1p}$, cioè rimbalza elasticamente.

Esercizi sugli urti centrali:

1) pendolo semplice di massa *m* e lunghezza *L*, lasciato andare dalla configurazione orizzontale con velocità iniziale nulla, urta elasticamente un blocco di massa *M* (*M*>>*m*) inizialmente in quiete sul piano orizzontale liscio. Studio del moto delle due masse m e M successivo all'urto.

2) blocco di massa *M* lanciato contro una particella di massa *m* (*m* <<*M*) posta in quiete alla base di un profilo circolare liscio di raggio *R:* discutere i casi di (a) urto completamente anelastico e (b) di urto perfettamente elastico.

Urti centrali fra particelle libere nel sistema C:

Per quanto riguarda l'energia cinetica interna, usando la relazione di Konig per l'energia cinetica, si ha:

$E_{k,p} = ½m_1v_{1,p}^2+½\ m_2v_{2,p}^2 = ½\ Mv_{CM,p}^2 +E'_{k,p} = E_{k,CM} + E_{k,p}^{INT}$

$E_{k,d} = ½m_1v_{i,d}^2+½\ m_2v_{2,d}^2= ½\ Mv_{CM,d}^2 +E'_{k,d} = E_{k,CM} + E_{k,d}^{INT}$

E dato che l'energia cinetica del CM del sistema si conserva prima e dopo l'urto ($E_{k,CM}$ non cambia) si avrà:

<u>Urto perfettamente elastico</u>: $E_{k,p} = E_{k,d}$

$\mathbf{P'}_{S,p} = m_1\mathbf{v}'_{1,p} + m_2\mathbf{v}'_{2,p} = 0 = \mathbf{P'}_{S,d} = m_1\mathbf{v}'_{1d} + m_2\mathbf{v}'_{2d}$

Cioè: $m_1\mathbf{v}'_{1,p} = -m_2\mathbf{v}'_{2,p}$ e $m_1\mathbf{v}'_{1,d} = -m_2\mathbf{v}'_{2,d}$ $(\mathbf{p}'_1 = -\mathbf{p}'_2)$

Per quanto riguarda l'energia cinetica interna, usando la relazione di Konig per l'energia cinetica, si ha $E'_{k,d} = E'_{k,p}$:

$$½\ m_1\ v'_{1,p}{}^2 + ½\ m_1\ v'_{1,p}{}^2 = ½\ m_1\ v'_{1,d}{}^2 + ½\ m_2\ v'_{2,d}{}^2$$

<u>Urto completamente anelastico</u>: $(E'_{k,d} = 0)$

Dopo l'urto le due particelle rimangono attaccate e se ne vanno con la velocità del centro di massa.

Conservazione della quantità di moto:

$$\mathbf{P}'_{S,p} = \mathbf{P}'_{S,d} \quad \Rightarrow \quad m_1\mathbf{v}'_{1,p} + m_2\mathbf{v}'_{2,p} = \mathbf{0}$$

Mentre per l'energia, si ha:

$$E_D = E_{k,,d} - E_{k,,p} = - E_{k,p}^{INT}$$

A) Urti fra particelle libere e corpi rigidi liberi

Urto elastico: oltre alla conservazione della quantità di moto totale e dell'energia cinetica totale del sistema durante l'urto, bisogna considerare anche la conservazione del momento angolare intrinseco.

Urto completamente anelastico: si ha la conservazione della quantità di moto totale del sistema durante l'urto, e anche la conservazione del momento angolare intrinseco.

B) Urti fra particelle libere e corpi rigidi vincolati

Urto elastico: oltre alla conservazione dell'energia cinetica totale del sistema durante l'urto, si conserva anche il momento angolare rispetto al punto O a cui è vincolato il corpo rigido.

Urto perfettamente anelastico: si conserva solamente il momento angolare totale rispetto al punto O in cui è imperniato il corpo urtato. L'energia dissipata nell'urto è data dalla variazione dell'energia propria U del sistema.