TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE

(M. Spera, N. Sansonetto) Prova scritta del $\boxed{1^\circ \text{ luglio } 2011}$

Tempo a disp. 1h 15' Le risposte vanno adeguatamente giustificate

(1) Sia $\mathcal{U} = \underset{\varphi}{(0, 2\pi)} \times \underset{\vartheta}{(0, \pi)}$

$$\alpha = \sin\vartheta \, d\varphi \wedge d\vartheta \qquad g = \sin^2\vartheta \, d\varphi^2 + d\vartheta^2 \text{ (metrica)}$$

Dimostrare che α è una forma simplettica.

Dimostrare che $X = \frac{\partial}{\partial\varphi}$ è hamiltoniano. Detta λ_X un'hamiltoniana, dimostrare che $\nabla\lambda_X \perp_g X$ ($\nabla\lambda$: gradiente di λ rispetto a g)

(2) In $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, dimostrare che $w = \dfrac{x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

è una 2-forma chiusa ma non esatta.

Calcolare $H^*(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$

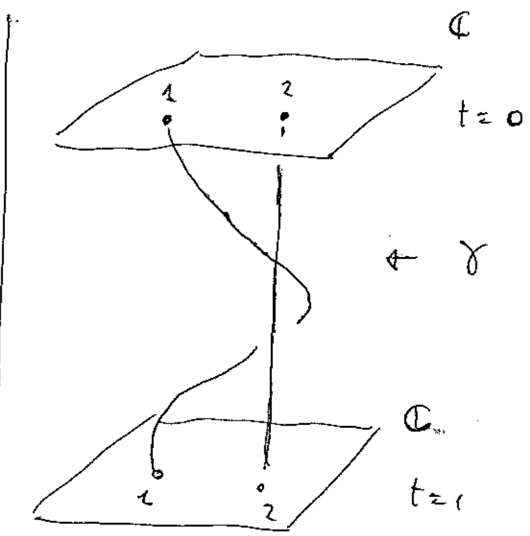
* (3) Sia dato $\mathrm{Conf}(\mathbb{C}, 3) = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \,/\, z_i \neq z_j,\ i \neq j\}$

Siano date le 1-forme $w_{ij} = \dfrac{1}{2\pi i} \dfrac{d(z_i - z_j)}{z_i - z_j}$

Dimostrare che $w_{ij} = w_{ji}$ e che $dw_{ij} = 0$

Dimostrare l'identità di Arnold $w_{12} \wedge w_{23} + w_{23} \wedge w_{31} + w_{31} \wedge w_{12} = 0$

Le forme w_{ij} sono esatte? Sugg. $\longrightarrow$



Si consideri il cammino chiuso γ in figura (in $\mathrm{Conf}(\mathbb{C}, 3)$) Quanto vale $\int_\gamma w_{12}$?

(4) In $(\mathbb{R}^2, dx^2 + dy^2)$, sia dato $X = f(x,y) \frac{\partial}{\partial x}$. Determinare f in modo che X sia di Killing

(5) In $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ si consideri il campo vettoriale $z \longmapsto V(z) = i z^4$.

Se ne determinino i pti critici con il relativo indice. Abbozzare il ritratto di fase

Topogeo 17/6/11

(1) $\mathcal{U} = \overset{\varphi}{(0,2\pi)} \times \overset{\vartheta}{(0,\pi)}$

$\alpha = \sin\vartheta \, d\varphi \wedge d\vartheta$ $\qquad g = (\sin\vartheta)^2 d\varphi^2 + d\vartheta^2$

metrica

α è una forma simplettica.

$X = \dfrac{\partial}{\partial\varphi}$ hamiltoniano? $\sim (1,0)$

$$i_{\frac{\partial}{\partial\varphi}} \alpha = \sin\vartheta \, d\vartheta = d(-\cos\vartheta)$$

$$\lambda_X = -\cos\vartheta + c$$

Calcoliamo $\nabla\lambda_X$ $\qquad \nabla\lambda = (d\lambda)^{\#}$ (is. musicale)

$$d\lambda = \sin\vartheta \, d\vartheta \sim (0, \sin\vartheta)$$

$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} (\sin\vartheta)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad g^{-1} = (g^{ij}) = \begin{pmatrix} (\sin\vartheta)^{-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

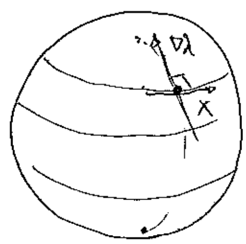
$$\nabla\lambda = \begin{pmatrix} (\sin\vartheta)^{-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\nabla\lambda = \sin\vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta} \qquad \nabla\lambda \perp X$$

$\boxed{v^i = g^{ij} v_j}$

★ il grad simplettico e il gradiente hamiltoniano di λ sono $\perp$ (α = forma d'area associata a g)

Int. geometrica



Topogeo 17/6/11

(2) $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

$$w = \frac{x\, dy\wedge dz + y\, dz\wedge dx + z\, dx\wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

ω è chiusa ma non esatta $\int_{S^2} w = 4\pi$

(è il teorema di Gauss in elettrostatica)

$$dw = d\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dy\wedge dz\right) + \dots$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) dx\wedge dy\wedge dz + \dots$$

$$= \frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - x\cdot \frac{3}{\cancel{2}}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\cdot \cancel{2}x}{(x^2+y^2+z^2)^3}\, dx\wedge dy\wedge dz$$

$$= \frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - 3\,(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\, x^2}{(\quad)}\, dx\wedge dy\wedge dz$$

sommando si ha subito l'asserto

Calcolare la coomologia di $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$.

Si ha $\mathbb{R}^3\setminus\{0\} \sim S^2 \Rightarrow \begin{cases} H^0 = \mathbb{R} \\ H^1 = 0 \\ H^2 = \mathbb{R} \end{cases}$

(3) Sia $\mathrm{Conf}(\mathbb{C},3) = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \ / \ z_i \neq z_j \ \ i \neq j\}$

Sia $\omega_{ij} = \frac{1}{2\pi i} \frac{d(z_i - z_j)}{z_i - z_j}$

dimostrare che $\omega_{ji} = \omega_{ij}$ e che $d\omega_{ij} = 0$

Dimostrare che

$$\boxed{\omega_{12} \wedge \omega_{23} + \omega_{23} \wedge \omega_{31} + \omega_{31} \wedge \omega_{12} = 0}$$

(identità di Arnold)

sugg.

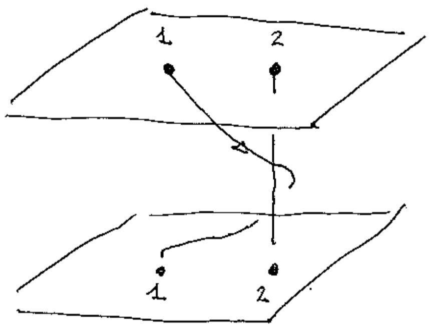
$x = z_1 - z_2$

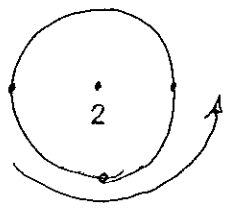
$y = z_2 - z_3$

$z = z_3 - z_1$

$x + y + z = 0$

★ Le forme ω_{ij} sono esatte ?





sugg: si consideri il cammino chiuso γ in $\mathrm{Conf}(\mathbb{C},3)$

quanto vale $\int_\gamma \omega_{12}$?

$\quad\quad\quad\quad \parallel$

$\quad\quad\quad\quad 2\pi i$

$$\frac{dx}{x} \wedge \frac{dy}{y} + \frac{dy}{y} \wedge \frac{dz}{z} + \frac{dz}{z} \wedge \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{z\, dx \wedge dy + x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx}{\underset{0 \neq}{xyz}} \qquad dz = -dx - dy$$

$$= \frac{z\, dx \wedge dy - x\, dy \wedge dx - y\, dy \wedge dx}{xyz} = \frac{\overset{\overset{0}{\parallel}}{\widetilde{(x+y+z)}}\, dx \wedge dy}{xyz} = 0$$

④ Sia $(\mathbb{R}^2, dx^2+dy^2)$

$$X = f(x,y)\frac{\partial}{\partial x}$$

Determinare f in modo che X sia di Killing

$$\mathcal{L}_X g = 0 \qquad \mathcal{L}_{f\frac{\partial}{\partial x}}(dx^2+dy^2) = 0$$

$$\mathcal{L}_{f\frac{\partial}{\partial x}}(dx^2) = \left(\mathcal{L}_{f\frac{\partial}{\partial x}} dx\right)\otimes dx + dx\otimes \mathcal{L}_{f\frac{\partial}{\partial x}} dx$$

$$\| $$

$$df\otimes dx + dx\otimes df$$

$\mathcal{L}_X h = (dh, X)$
$= X(h)$

$\mathcal{L}_X dx = d\,\mathcal{L}_X x$
$= d\, X(x)$

$$\mathcal{L}_{f\frac{\partial}{\partial x}}(dy^2) = 0$$

Perciò $\quad df\otimes dx + dx\otimes df = 0$

$$f_x\,dx^2 + f_y\,dy\otimes dx + f_x\,dx^2 + f_y\,dx\otimes dy$$

$dx\,dy = \frac{1}{2}(dx\otimes dy + dy\otimes dx)$

$$\Rightarrow \quad 2f_x\,dx^2 + 2f_y\,dx\,dy = 0$$

$$\Rightarrow \quad f_x = f_y = 0 \quad \Rightarrow \quad f = \text{cost}$$

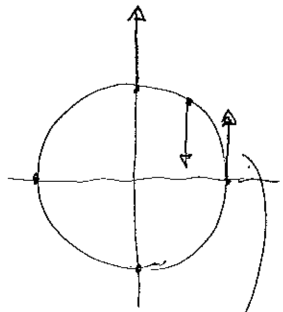
(5) In $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ si consideri il campo vettoriale $z \longmapsto V(z) = i \cdot z^4$

Se ne determinino i punti critici con il relativo indice.

Sol. $V(z) = 0$ per $z = 0$. L'indice vale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{V'}{V}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cancel{i}\cdot 4 z^{\cancel{3}}\,dz}{\cancel{i}\, z^{\cancel{4}}} = \frac{1}{2\pi i}\cdot 4 \cdot \underbrace{\int_\gamma \frac{dz}{z}}_{= 2\pi i}$$

$$= 4$$



su $|z| = 1$

$\varphi \longmapsto i e^{i4\varphi}$

$\varphi = 0 \longmapsto i$

$\varphi = \frac{\pi}{4} \longmapsto i(-1) = -i$

$\varphi = \frac{\pi}{2} \longmapsto i$

1 giro completo.