TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE
Prof. M. Spera
a.a. 2009/10 Lezione **XXVI**

L'incursione prosegue:

$$\begin{cases} \dot q = \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ \dot p = -\dfrac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

*** Equazioni di Hamilton

$(\underbrace{M, \omega}_{\text{varietà simplettica}}, \underset{\text{hamiltoniana}}{H})$

Sistema hamiltoniano

osservare che $\mathcal{L}_X H = X(H) = dH(X)$

$$= \left(\frac{\partial H}{\partial q} dq + \frac{\partial H}{\partial p} dp , \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p} \right)$$

$$= \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} = 0$$

se prendo $g = dq^2 + dq^2$

$$\langle \underset{\text{gradiente riemanniano di } H}{\operatorname{grad} H}, \underset{\text{gradiente simplettico di } H}{X_H} \rangle = 0$$

i.e. H è costante lungo le traiettorie del moto ("conservazione dell'energia")

$$\omega(X_\lambda, X_\mu) = (dq \wedge dp)\left(\frac{\partial \lambda}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial \lambda}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p}, \frac{\partial \mu}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial \mu}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p} \right)$$

$$= \left(\frac{\partial \lambda}{\partial p} dp + \frac{\partial \lambda}{\partial q} dq , \frac{\partial \mu}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial \mu}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p} \right)$$

$$= \frac{\partial \lambda}{\partial q}\frac{\partial \mu}{\partial p} - \frac{\partial \lambda}{\partial p}\frac{\partial \mu}{\partial q} = \{\lambda, \mu\}$$

* parentesi di Poisson

Notare: data $f = f(q, p) \equiv f(q(t), p(t))$ funzione C^∞ (osservabile (classico))

$$\dot f = \frac{\partial f}{\partial q}\dot q + \frac{\partial f}{\partial p}\dot p = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} = \{f, H\}$$

$$\boxed{\dot f = \{f, H\}}$$

* altra forma delle equazioni di Hamilton

commento:

*** Dirac: in M.Q., rimpiazzare $\{,\}$ con $[\ ]$

$$\dot F = \frac{i}{\hbar}[F, H]$$

* equazione di Heisenberg.
F, H osservabili quantistici: operatori autoaggiunti su $\mathcal{H}$, sp. di Hilbert della teoria

"meccanica delle matrici"

Notiamo la seguente formula, utile in sé

$$[fX,\ gY] = fX(g)Y - gY(f)X + fg[X,Y]$$

dim. applichiamo il primo membro a $\varphi \in C^\infty(M)$

$$[fX,\ gY](\varphi) = fX[g \cdot Y(\varphi)] - gY(fX(\varphi))$$

$$= fX(g)\cdot Y(\varphi) + gf\, X(Y(\varphi)) - gY(f)\cdot X(\varphi)$$

$$- gfY(X(\varphi)) = \{ fX(g)Y - gY(f)X$$

$$+ fg\,[X,Y] \}(\varphi) \qquad \square$$

$$X_\lambda = \frac{\partial\lambda}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial\lambda}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p} \qquad X_\mu = \frac{\partial\mu}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial\lambda}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p}$$

Si provi, per esercizio, la formula seguente:

$$[X_\lambda, X_\mu] = \underset{\text{vorremmo un } +}{-}\ X_{\{\lambda,\mu\}} = X_{\{\mu,\lambda\}}$$

il segno diviene quello desiderato se si definisce, come spesso avviene in letteratura, $[\ ,\ ] = -[\ \ ]_{\text{nostro}}$ (perché $\mathcal{L}_X Y = -(\mathcal{L}_X Y)_{\text{nostra}}$)

osserviamo solo che se $\lambda = q$, $\mu = p$, si ha

$$\{\lambda,\mu\} = \frac{\partial\lambda}{\partial q}\frac{\partial\mu}{\partial p} - \frac{\partial\lambda}{\partial p}\frac{\partial\mu}{\partial q}, \quad \{q,p\} \equiv 1 \qquad X_1 = 0$$

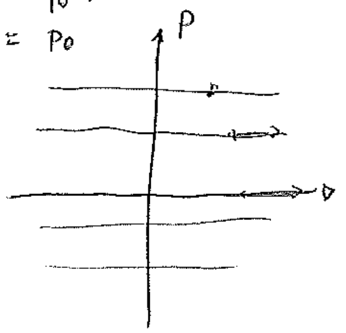
$$X_q = -\frac{\partial}{\partial p}, \quad X_p = \frac{\partial}{\partial q}, \quad [X_q, X_p] = 0$$

Esempio $\quad X = \dfrac{\partial}{\partial q} \quad$ traslazioni

$$i_X \omega = (dq \wedge dp)\left(\frac{\partial}{\partial q}, \cdot\right) = dp$$

$$\begin{cases} \dot q = 1 \\ \dot p = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} q = q_0 + t \\ p = p_0 \end{matrix}$$

$p = \text{cost}$



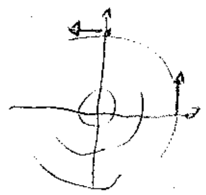
$\lambda_X = p \ (+c)$

momento

conservato lungo le traiettorie

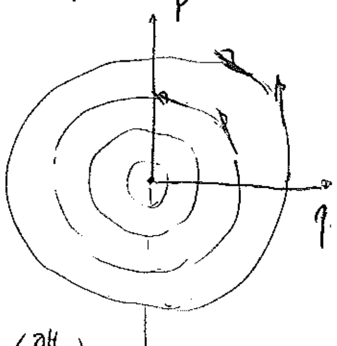
(invarianza per traslazione)

$$X = q\frac{\partial}{\partial p} - p\frac{\partial}{\partial q} \qquad \text{rotazioni}$$



$$dq \wedge dp\left(+q\frac{\partial}{\partial p} - p\frac{\partial}{\partial q}, \cdot\right) = -(q\,dq + p\,dp) = d\underbrace{\left(-\frac{p^2+q^2}{2}\right)} = \lambda_X$$

$$\begin{cases} \dot q = -p \\ \dot p = +q \end{cases}$$



in altro modo: $(\Omega^T \xi = \nabla H)$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q \\ -p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} \Rightarrow H = -\tfrac{1}{2}(p^2+q^2)$$

$$\left[\ \lambda_{-X} = \text{ham. oscillatore armonico} \quad H = \tfrac{1}{2}(p^2+q^2)\ \right]$$

Notare: in entrambi gli esempi

$X_\lambda \perp \text{grad}\,\lambda$, come dev'essere.

In generale, dato un sistema hamiltoniano (M, ω, H) un integrale primo è un osservabile che Poisson-commuta con H. Infatti da $\dot f = \{f, H\}$ segue che $\dot f \equiv 0$ lungo le traiettorie

(curve integrali di H) $\Leftrightarrow \{f, H\} = 0$

Dall'identità di Jacobi

$$\{f,\{g,H\}\} + \{g,\{H,f\}\} + \{H\{f,g\}\} = 0$$

segue che, se f e g sono integrali primi, lo è pure $\{f,g\}$. Due integrali primi si dicono <u>in involuzione</u> se $\{f,g\} = 0$; ciò equivale a dire

$$\omega(X_f, X_g) = 0$$

ovviamente, il caso di interesse è quello in cui f non sia una f. di g (o vic.) (indipendenza <u>funzionale</u>)

— · — · —

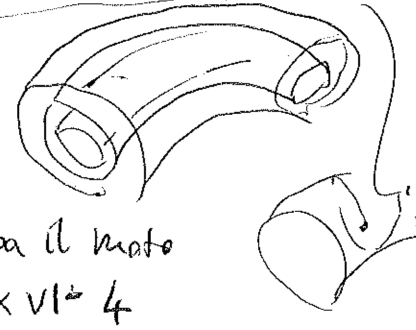
Es. semplicissimo $\quad H = \dfrac{p^2}{2m} \quad$ particella libera

H integrale del moto. Qualsiasi $f(H)$ lo è, ex p.
in questo caso non ve ne sono altri

— · — · —

Nei sistemi hamiltoniani comple<u>tamente</u> inte<u>grabili</u>
(n gradi di libertà, $M = \mathbb{R}^n$, $\omega = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i$)
si hanno $\underline{n}$ integrali primi indipendenti in <u>involuzione</u>, I_i : variabili di <u>azione</u>, coniugate (in senso tecnico) a <u>variabili angolari</u> (I_i, φ_i) : <u>variabili azione-angolo</u>. $H = H(I_1 \ldots I_n)$

$\omega = \sum dI_i \wedge d\varphi_i$



lo spazio delle fasi è fogliato in <u>tori</u> $I_i = c_i$

* tori lagrangiani, o di <u>Liouville</u>

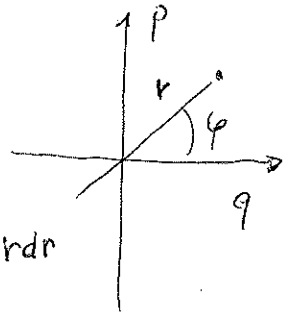
sui quali si sviluppa il moto

Esempio: l'oscillatore armonico (pendolo semplice)

$$H = \frac{1}{2}(q^2+p^2)$$

$$= \frac{1}{2} r^2$$

(coord. polari r, φ)



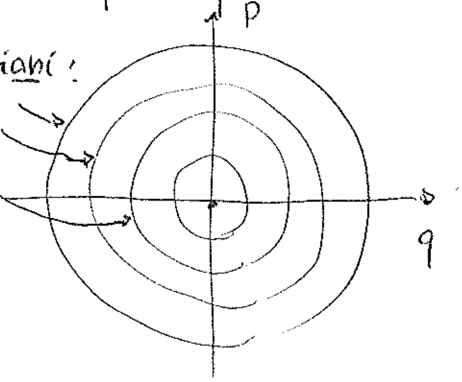
$dH = r\,dr$

$$dq \wedge dp = r\,dr \wedge d\varphi = dH \wedge d\varphi$$

$$\equiv dI \wedge d\varphi$$

azione angolo

tori lagrangiani: circonferenze



$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = p \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} = -q \end{cases}$$

$$\ddot{q} = \dot{p} = -q$$

$$\ddot{q} + q = 0$$

$$q(t) = A\cos t + B\sin t$$

in termini di I, φ

$$\begin{cases} \dot{I} = \dfrac{\partial H}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial I}{\partial \varphi} = 0 & I = c \\ \dot{\varphi} = -\dfrac{\partial H}{\partial I} = -\dfrac{\partial I}{\partial I} = -1 & \varphi = -t + c \end{cases}$$

★ Nota. Riprenderemo il discorso sulle variabili d'azione quando tratteremo la teoria di de Rham