Calcolo Numerico per Informatica – Preappello – 26/05/2016

Tempo: 150 minuti

MATRICOLA	COGNOME	NOME

Esercizio 1 (**5 punti**) Si consideri il problema di valutare nel sistema floating point $\mathbb{F}(10, 2, -3, 3)$ la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+x} - 1$$

per $x_0 = 0.16$.

(a) (**1 punto**) Calcolare il numero di condizionamento e dire se il problema è ben o mal condizionato.

(b) (**2 punti**) Calcolare il valore esatto di $y_0 = f(x_0)$ ed il corrispondente valore $\hat{y}_0$ quando tutte le operazioni sono eseguite in $\mathbb{F}$. Calcolare l'errore relativo $|(y_0 - \hat{y}_0)/y_0|$.

(c) (**2 punti**) Proporre una espressione equivalente per il calcolo di $f(x)$ che sia più accurata di quella data per valutare $f(x_0)$ in $\mathbb{F}$. Usando questa espressione equivalente, ripetere il calcolo di $\hat{y}_0$ e del corrispondente errore $|(y_0 - \hat{y}_0)/y_0|$.

Esercizio 2 (**7 punti**) Si consideri il metodo di Newton per approssimare la radice $\xi_0 = 0$ di $f(x) = x^2 \cdot (1 - x)$.

(a) (**1 punto**) Calcolare la molteplicità di ξ_0 ed abbozzare il grafico di f per x vicino a ξ_0.

(b) (**1 punto**) Determinare l'ordine del metodo, la costante asintotica dell'errore e fornire un grafico qualitativo del logaritmo in base dieci dell'errore.

(c) (**3 punti**) Preso $x_0 = -0.5$, spiegare quale tipo di monotonia ha la successione x_k generata dal metodo di Newton. Scrivere esplicitamente l'equazione che dà x_{k+1} a partire da x_k e calcolare le iterate x_1, x_2 e x_3. Usare queste iterate per ottenere un'altra stima della costante asintotica dell'errore.

(d) (**1 punto**) Calcolare una stima del numero k di iterazioni necessarie per avere $|e_k| < 10^{-6} \cdot |e_0|$.

(e) (**1 punto**) Detta ora x_k la successione generata da Newton con $x_0 = 2$, calcolare, se esiste,

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{|x_{k+1} - 1|}{(x_k - 1)^2}$$

Esercizio 3 (**6 punti**) Della funzione f si conoscono i seguenti valori $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, 3$

i	0	1	2	3
x_i	-2	-1	1	3
y_i	2	1	3	5

(a) (**3 punti**) Costruire la tabella delle differenze divise e scrivere il polinomio di interpolazione nella forma di Newton verificando che passa per i punti indicati. Usare il polinomio trovato per stimare $f(2)$. Lasciare indicati i numeri come frazioni.

(b) (**2 punti**) Determinare $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ per i quali risulta minima la funzione $S(a_0, a_1)$ data da

$$S(a_0, a_1) = \sum_{i=0}^{3} \left[\, a_0 + a_1 x_i - y_i \,\right]^2$$

(c) (**1 punto**) Scrivere il polinomio di Lagrange associato a $x_2 = 1$ ed abbozzarne un grafico qualitativo nell'intervallo $[-3, 4]$.

Esercizio 4 (**6 punti**) Si consideri il calcolo dell'integrale

$$I = \int_1^5 \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{4}{5}$$

(a) (**1,5 punti**) Determinare il numero m di intervalli del metodo dei trapezi composto che garantisce il calcolo dell'integrale $I_T^{(m)}$ con un valore assoluto dell'errore $E_T^{(m)} = I - I_T^{(m)}$ non superiore a $\epsilon = 10^{-4}$.

(b) (**3 punti**) Usando il metodo dei trapezi composto, calcolare due stime dell'integrale $I_T^{(2)}$ e $I_T^{(4)}$ con $m = 2$ e con $m = 4$ intervalli. Calcolare i corrispondenti errori $E_T^{(2)} = I - I_T^{(2)}$ e $E_T^{(4)} = I - I_T^{(4)}$ ed il loro rapporto.

(c) (**0.5 punti**) Usare $I_T^{(2)}$ e $I_T^{(4)}$ per ottenere una stima $\hat{I}$ più accurata dell'integrale I.

(d) (**1 punto**) Dire, senza fare il calcolo, se il metodo di Cavalieri-Simpson con $m = 2$ intervalli dà un risultato uguale o diverso a $\hat{I}$ ottenuto al punto (c).

Esercizio 5 (**7 punti**) Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(a) (**0.5 punti**) Dire se il metodo iterativo di Jacobi converge senza calcolare la corrispondente matrice di iterazione.

(b) (**3 punti**) Determinare la matrice di iterazione del metodo di Jacobi, il corrispondente raggio spettrale ed il numero di iterazioni necessarie per avere $\|\mathbf{e}^{(k)}\| \le 10^{-6} \cdot \|\mathbf{e}^{(0)}\|$.

(c) (**1 punto**) Dette $\mathbf{x}^{(k)}$ la successione generata dal metodo di Jacobi, dire, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, a quale $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ converge partendo da $\mathbf{x}_0 = (\alpha\ ,\ 0\ ,\ \alpha)^T$.

(d) (**1 punto**) Senza calcolare la matrice di iterazione di Gauss-Seidel, dire se il metodo converge. Disegnare, sullo stesso grafico, un andamento qualitativo del logaritmo in base dieci della norma degli errori dei due metodi.

(e) (**1.5 punto**) Scrivere le equazioni dei metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel per le singole componenti e calcolare $\mathbf{x}^{(1)}$ per ambo i metodi a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = (0\ ,\ 0\ ,\ 0)^T$.

Esercizio 6 (**3,0 punti**) Scrivere una function Matlab che, usando un ciclo, effettui lo stesso lavoro della seguente istruzione Matlab

```
>> S = sum( 1./(1:m).^2 );
```

La function ha come ingresso il valore di m e come uscita S.

Scrivere in modo chiaro ed ordinato. Tutte le risposte devono essere accuratamente giustificate alla luce della teoria svolta. Risposte corrette ma non adeguatamente giustificate non sono ritenute valide.