

Serie numeriche

Rigo Diego

December 1, 2013

1 Serie numeriche

Vogliamo studiare le *serie numeriche*, ovvero somme infinite di valori, detti anche *termini* della successione $\{a_n\}$. Un risultato importante è che:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k a_n$$

ovvero una serie non è altro che il limite della *serie ridotta* n -esima (ovvero le cosiddette *somme parziali*)

Ora può essere utile chiedersi se questa serie converge a qualcosa, ovvero se la somma di tutti questi termini è finita (*converge*), infinita (*diverge*) o indeterminata, ovvero continua ad oscillare senza mai convergere a qualche valore. Innanzitutto vale questo semplice fatto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Quindi condizione necessaria per avere una serie convergente è che il termine n -esimo della serie tenda a zero per $n \rightarrow \infty$

Principi di confronto : sia $a_n \geq 0$ e $b_n \geq 0$, allora valgono i seguenti:

- Se vale $a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$
- Se vale $a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \infty$
- (*Principio asintotico*) : Se $a_n \sim b_n$ (ovvero $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$) allora le due serie hanno lo stesso carattere (se una converge, anche l'altra converge,...)

Diciamo che una serie *converge assolutamente* se converge la serie dei valori assoluti dei termini della successione. In particolare:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$$

Tra i criteri più usati per determinare il carattere di una serie, uno dei più importanti è il seguente:

Criterio della radice (e del rapporto) : sia a_n il termine generale della serie e supponiamo che esista uno dei seguenti limiti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell_1 \quad \text{o} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell_2$$

allora, se $\ell_1 > 1$ (o analogamente $\ell_2 > 1$) la serie non converge, mentre se $\ell_1 < 1$ (o analogamente $\ell_2 < 1$) la serie converge

NB : se $\ell_1 = 1$ e $\ell_2 = 1$ non possiamo dire nulla sul comportamento della serie.

Una serie è detta *a segni alterni* se è della forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots$$

Criterio di Leibniz : data una serie a segni alterni, se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ e $a_{n+1} \leq a_n$ allora la serie converge

2 Serie di potenze

Possiamo considerare anche delle *serie di funzioni*, ovvero somme infinite di funzioni. In particolare ci concentriamo sulle *serie di potenze*, ovvero del tipo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

In un certo senso è una generalizzazione dei polinomi! Ora, fissato il valore di x ci chiediamo se la serie converge, e in particolare siamo interessati all'insieme dei valori x per cui la serie converge. Chiamiamo *raggio di convergenza* il più grande valore $r > 0$ tale che $\forall x \in (-r, r)$ la serie converge.

Proposizione : se vale $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$ oppure $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell$ allora:

- se $\ell \in \mathbb{R}$ allora il raggio di convergenza è $r = \frac{1}{\ell}$
- se $\ell = +\infty$, il raggio è $r = 0$ (cioè converge solo in $x = 0$)
- se $\ell = 0$, il raggio è $r = +\infty$ (ovvero converge $\forall x \in \mathbb{R}$)

Regolarità : la serie di potenze è continua e derivabile in $(-r, r)$ (con r raggio di convergenza) e vale la seguente formula di derivazione :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

cioè è sufficiente derivare termine a termine la serie.