Università degli Studi di Verona
Dipartimento di Informatica

Ca' Vignal 2
Strada le Grazie 15
37134 Verona - Italia
Tel. +39 045 802 7069
Fax +39 045 802 7068

Corso di Laurea in Matematica Applicata
Analisi Matematica I: foglio di esercizi n. 1
14 ottobre 2015

Risolvere i seguenti problemi. Da consegnare entro il 5/11.

Pb 1. Si consideri la funzione $f : (-\infty, 0] \to [0, +\infty)$ definita da $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$. Se ne studi la buona definizione, l'iniettività e la suriettività. Se esiste, se ne trovi l'inversa.

Pb 2. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+3x^2)}{\sin^2(4x)},$$
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^5-1}-\sqrt{x}},$$
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+x^2\sin x}{\sqrt{1+x^6}}.$$

Pb 3. Si consideri una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, ove $[a, b]$ è un intervallo chiuso e limitato della retta reale.

Uno studente poco attento scrive la seguente *definizione sbagliata* di continuità di f nel punto $x_0 \in [a, b]$:

$$(*) \quad \forall \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0 \textit{ tale che se } x \in [a, b],\ |x - x_0| < \delta,\ \textit{allora } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Mostrare che la condizione $(*)$ è soddisfatta se e soltanto se la funzione f è *limitata* in $[a, b]$.

Soluzioni:

Pb 1. Il radicando è non negativo per $x \leq 0$ e la funzione assume solo valori non negativi: essa è dunque ben definita. Per rispondere alla domanda sull'iniettività e sulla suriettività, dobbiamo "contare" le soluzioni x con $x \leq 0$ dell'equazione $y = \sqrt{x^2 - x}$: se ce n'è *al più* una per ogni fissato $y \geq 0$, la funzione è iniettiva. Se ce n'è *almeno* una per ogni fissato $y \geq 0$, la funzione è suriettiva. Elevando al quadrato otteniamo l'equazione di secondo grado $x^2 - x - y^2 = 0$, le cui soluzioni sono $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4y^2}}{2}$. Di queste, una sola è minore o uguale a 0:

$$x = \frac{1 - \sqrt{1 + 4y^2}}{2}.$$

Dunque, per ogni $y \geq 0$ esiste una ed una sola soluzione ≤ 0 della nostra equazione e la funzione è sia iniettiva che suriettiva. Abbiamo anche trovato la funzione inversa, che è

$$f^{-1}(y) = \frac{1 - \sqrt{1 + 4y^2}}{2}.$$

Pb 2. Vediamo il primo limite: è abbastanza facile ridursi a limiti fondamentali mediante facili passaggi algebrici. Infatti la funzione di cui dobbaimo calcolare il limite può essere riscritta

$$\frac{\log(1 + 3x^2)}{3x^2} \cdot \frac{(4x)^2}{\sin^2(4x)} \cdot \frac{3}{16}.$$

Per i limiti fondamentali, le prime due frazioni tendono a 1 e quindi il limite richiesto vale $3/16$.

Per il secondo limite, dividiamo numeratore e denominatore per x. La nostra espressione diventa:

$$\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{\frac{1}{x}}}{\sqrt[4]{x - \frac{1}{x^4}} - \sqrt{\frac{1}{x}}} \to 0 \textit{ per } x \to +\infty.$$

Per calcolare il terzo limite, si dividano numeratore e denominatore per x^3: si ottiene

$$\frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x^6} + 1}}$$

e il risultato richiesto è 1.

Pb 3. Supponiamo che valga $(*)$. Possiamo scegliere δ abbastanza grande in modo che $[a, b] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. In tal caso, abbiamo che per ogni $x \in [a, b]$ vale la disuguaglianza $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, cioè $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$: la funzione f possiede sia un maggiorante che un minorante reali ed è dunque limitata.

Viceversa, supponiamo che f sia limitata in $[a,b]$ e siano $M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$, $m = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$.Se scegliamo $\varepsilon = 2(M - m)$, allora la disuguaglianza $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ vale per ogni $x \in [a,b]\ldots$ e quindi a maggior ragione la $(*)$ vale per ogni scelta di $\delta > 0$.