URTI: Collisioni o scontro fra particelle libere [e vincolate].

I fenomeni di collisione avvengono quando due corpi, provenendo da punti lontani l'uno dall'altro, entrano in interazione reciproca, e a causa dell'interazione mutua, cambiano il loro stato di moto individuale, cioè la quantità di moto di ciascuno dei due corpi.

L'interazione può essere a distanza oppure a contatto, e può avere durata temporale estesa oppure avere carattere istantaneo.

Casi di collisone che durano nel tempo: a) una cometa che si avvicina alla terra o b) un corpo che urta l'estremità libera di una molla avente l'altra estremità ancorata a un altro corpo.

Casi di urto istantaneo: a) scontro tra due sfere da biliardo, oppure b) urto tra un sasso lanciato dalla sommità di una torre e un proiettile sparato dalla base della torre nello stesso piano verticale.

Due punti materiale (o 2 corpi estesi) collidono quando durante il loro moto si vengono a trovare nello stesso punto (o regione) dello spazio, che pertanto è comune alla traiettoria dei due punti (corpi).

Approssimazione di impulso: l'interazione fra le due particelle e/o corpi è pressoché istantanea e l'azione delle forze esterne durante l'urto NON è tale da cambiare lo stato di moto (traslazionale e rotazionale) del sistema delle due particelle nel suo insieme.

Lo stato di moto del centro di massa NON cambia durante l'urto, dato che le forze interne non sono in grado di variare la quantità di moto del sistema e le forze esterne non hanno carattere impulsivo.

Si tratta di studiare il moto del sistema delle due particelle dopo l'urto nel sistema del laboratorio (Sistema L) o nel sistema del CM (Sistema C), a seconda della convenienza.

N.B.: Nel sistema del laboratorio (Sistema L), sfruttando opportunamente il teorema di Konig per l'energia, il moto del sistema si potrà scomporre nel moto del CM del sistema e nel moto relativo e al CM, quest'ultimo espresso in termini di massa ridotta delle due particelle e della loro velocità relativa .

Generalmente si conosce lo stato di moto (masse + velocità) delle particelle (e/o corpi) subito prima dell'urto e si tratta di trovare lo stato di moto (masse + velocità) delle particelle subito dopo l'urto.

Ipotesi: le masse delle particelle individuali o dei due corpi non variano durante l'urto, quindi si tratta di determinare le velocità delle particelle o dei due corpi subito dopo l'urto.

Due classi/tipi di fenomeni d'urto:
A) Urti tra due particelle libere (sistema isolato)
B) Urti tra una particella libera e un corpo vincolato.

A) Caso di corpi e/o particelle libere o soggette a forze esterne non impulsive.

Nel caso di un urto fra due corpi che formano un sistema isolato (oppure un sistema NON soggetto a forze esterne impulsive) si ha la conservazione della quantità di moto $\mathbf{P}_S$ del sistema durante l'urto, dato che nell'urto entrano in gioco solo le forze interne.

Significato di "durante l'urto" = subito prima e subito dopo l'urto.

N.B: La quantità di moto $\mathbf{P}_S$ del sistema durante l'urto si conserva anche nel caso di sistema non isolato se le forze esterne non sono impulsive. Esempio: urto tra due palle di bigliardo!

Es. pendolo balistico, costituito da un blocco di legno (o paraffina) attaccato a un filo (o asta) a sua volta ancorato a un punto O fisso.

Se il proiettile, al momento dell'urto con il blocco, viaggia in direzione perpendicolare al filo (o asta) a cui è appeso il blocco nell'urto si conserva la quantità di moto totale del sistema.

Inoltre, nel caso di un urto fra due corpi che formano un sistema isolato (oppure NON soggetto a forze esterne impulsive) si dovrà conservare anche il momento della quantità di moto totale $\mathbf{L}_{O,S}$ del sistema, dal momento che nell'urto entrano in gioco solo le forze interne al sistema che non modificano il suo momento angolare.

B) Se invece, nel caso di un sistema vincolato durante l'urto le forze esterne sono impulsive, la quantità di moto $\mathbf{P}_S$ del sistema NON si conserva (cioè subito dopo $\mathbf{P}_{S,d}$ è diverso da $\mathbf{P}_{S,p}$ subito prima), dal momento che entrano in gioco oltre alle forze interne impulsive anche forze esterne (dovute alla reazione vincolare) avente carattere impulsivo.

⇒ Es.: pendolo balistico, con asta incernierata in O e proiettile che viaggia in direzione obliqua rispetto alla direzione dell'asta.

In tal caso si conserva il momento della quantità di moto totale $\mathbf{L}_{O,S}$ del sistema durante l'urto rispetto al punto O in cui è imperniato il sistema, e quindi si avrà che $\mathbf{L}_{O,S,d}$ è uguale a $\mathbf{L}_{O,S,p}$. Ma NON si conserva la quantità di moto $\mathbf{P}_S$ del sistema perché la reazione $\mathbf{R}_O$ (o risposta) del perno in O, durante l'urto, è impulsiva, e si avrà $\mathbf{P}_{S,p} = \mathbf{P}_{S,d} + \mathbf{R}_O$. E quindi: $\mathbf{R}_O = \mathbf{P}_{S,d} - \mathbf{P}_{S,p}$.

Definizione di urto centrale: quando la velocità relativa delle due particelle subito prima dell'urto e subito dopo l'urto è diretta lungo la retta congiungente le due particelle, si parla di un urto centrale (cioè di urto in una dimensione).

Urto non-centrale (o urto piano): quando la velocità relativa delle due particelle subito dopo l'urto NON ha la direzione della retta congiungente le due particelle subito prima dell'urto e si parla di urto non-centrale o piano (cioè di urto in due dimensioni).

Urti centrali fra due particelle (e/o corpi) libere nel sistema L

Si ha la conservazione della quantità di moto totale $\mathbf{P}_S$ del sistema delle 2 particelle libere o soggette a forze esterne NON impulsive:

$$\mathbf{P}_{S,p} = \mathbf{P}_{S,d}$$

cioé:

$$m_1\mathbf{v}_{1,p} + m_2\mathbf{v}_{2,p} = m_1\mathbf{v}_{1d} + m_2\mathbf{v}_{2d} \qquad (1)$$

La (1) è un'equazione vettoriale con due (1+1) incognite; che nel caso di urto centrale origina una sola equazioni scalare in due incognite, e quindi il problema non si risolve usando soltanto la conservazione della quantità di moto $\mathbf{P}_S$ del sistema dei 2 PM.

N.B.: Nel caso di urto non-centrale (i.e.: urto piano), dalla (1) si otterrebbero due equazioni scalari: una per la componente lungo x e l'altra per la componente lungo y, per un totale di 4 incognite.

In entrambi i tipi di urto, per risolvere il problema, bisogna trovare una condizione in aggiunta alla conservazione della quantità di moto $\mathbf{P}_S$ del sistema durante l'urto, condizione che viene di solito fornita dall'comportamento dell'energia cinetica del sistema subito prima dell'urto e subito dopo l'urto. Cosa succede all'energia cinetica $E_{k,S}$ del sistema subito prima e subito dopo l'urto?

L'energia cinetica totale $E_{k,S}$ del sistema:
– si conserva solo nel caso di urto elastico (in questo caso le forze interne che entrano in gioco durante l'urto sono conservative);
– ma NON si conserva nel caso di urto anelastico (le forze interne che entrano in gioco durante l'urto non sono conservative).

Urti anelastici. Nel caso di urto completamente o perfettamente anelastico, dopo l'urto le due particelle rimangono attaccate e si spostano con la velocità $\mathbf{v}_{CM}$ del centro di massa del sistema che è la stessa prima e dopo l'urto, in virtù della conservazione di $\mathbf{P}_S$ durante l'urto. Invece, $E_{k,S,d}$ sarà diversa da $E_{k,S,p}$

La variazione di energia cinetica ($\Delta E_k = E_{k,S,d} - E_{k,S,p}$) in un urto anelastico è detta anche Q–valore della collisione (o reazione).

Pertanto nell'urto completamente anelastico si conserva solamente la quantità di moto totale $\mathbf{P}_S$ del sistema dei due punti materiali:

$$\mathbf{P}_{S,p} = \mathbf{P}_{S,d} \qquad \Rightarrow \qquad m_1\mathbf{v}_{1,p} + m_2\mathbf{v}_{2,p} = (m_1 + m_2)\, \mathbf{v}_{CM,d}$$

che nel caso di un urto perfettamente anelastico centrale genera una sola equazione scalare, con un'unica incognita: $v_{CM,d}$.

Al contrario, l'energia cinetica totale $E_{k,S}$ del sistema non si conserva, mentre si conserva l'energia cinetica $E_{k,CM}$ del centro di massa. Quindi in un urto anelastico, tutta l'energia cinetica interna del sistema prima dell'urto viene dissipata durante l'urto stesso.

Energia dissipata nell'urto perfettamente anelastico:

$$E_D = \Delta E_k$$

con $\Delta E_k = E_{k,S,d} - E_{k,S,p}$, che risulterà negativa!

Infatti E_D corrisponde alla variazione di energia cinetica:

$$E_D = (½m_1 v_{1,d}^2 + ½m_2 v_{2,d}^2) - (½m_1\, v_{1,p}^2 + ½m_1\, v_{2,p}^2) = -\,½\,\mu\, v_{12}^2$$

o equivalentemente, dato che $v_{1,d} = v_{2,d} = v_{CM,d}$,

$$E_D = ½(m_1 + m_2)v_{CM,d}^2 - [½(m_1 + m_1)\, v_{CM,p}^2 + ½(m_1\, v_{1,p}'^2 + m_1\, v_{2,p}'^2)]$$
$$= -\,½[m_1 m_2/(m_1+m_2)]v_{12,p}^2 = -\,½\,\mu\, v_{12,p}^2 = -\,E_{k,p}^{INT} < 0!$$

Quindi, per l'energia dissipata, si ha:

$$E_D = \Delta E_k = E_{k,S,d} - E_{k,S,p} = -\,E_{k,p}^{INT}$$

N.B.: Urto completamente anelastico: ($E_{k,d}^{INT} = 0$, $Q = -\,E_{k,p}^{INT}$)

Esercizi sull'urto centrale perfettamente anelastico:

1) proiettile di massa m sparato con velocità orizzontale $\mathbf{v}_0$ contro blocco di legno di massa M (>>m) vincolato a una fune di lunghezza L in configurazione di equilibrio statico (pendolo balistico): calcolo della quota h_{max} raggiunta dal blocco+ proiettile dopo l'urto e derivazione della velocità d'impatto del proiettile .

2) particella di massa *m* lasciata cadere da un'altezza h_0 su una piastra di massa *M* che si trova in posizione di equilibrio sopra una molla di costante elastica k. Studiare il moto successivo del sistema, assumendo che l'urto sia completamente anelastico.

Urti centrali elastici: $E_{K,p} = E_{K,d}$ (i..e.: Q = 0) e quindi:

Nel caso di urto elastico oltre alla quantità di moto totale $\mathbf{P}_S$ del sistema si conserva anche la sua energia cinetica, $E_{k,S,d} = E_{k,S,p}$:

$$\tfrac{1}{2}m_1 v_{1,p}^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_{2,p}^2 = \tfrac{1}{2}m_1 v_{1,d}^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_{2,d}^2 \qquad (2)$$

Questa è la seconda equazione scalare da accoppiare alla:

$$m_1\mathbf{v}_{1,p} + m_2\mathbf{v}_{2,p} = m_1\mathbf{v}_{1d} + m_2\mathbf{v}_{2d} \qquad (1)$$

(che va proiettata lungo l'asse che individua la direzione del moto delle due particelle che si urtano centralmente) per risolvere il problema della determinazione di $v_{1,d}$ e $v_{2,d}$.

Da (1) si ha: $$m_1(v_{1,p} - v_{1d}) = m_2(v_{2d} - v_{2,p}) \qquad (1')$$

Da (2) si ha: $\tfrac{1}{2}m_1 (v_{1,p}^2 - v_{1,d}^2) = \tfrac{1}{2}m_2 (v_{2,d}^2 - v_{2,p}^2)$, cioé

$$m_1 (v_{1,p} - v_{1,d}) (v_{1,p} + v_{1,d}) = m_2 (v_{2,d} - v_{2,p}) (v_{2,d} + v_{2,p})$$

e ricordando la (1') si ha: $(v_{1,p} + v_{1,d}) = (v_{2,d} + v_{2,p})$, cioè:

$$v_{1,d} - v_{2,d} = v_{2,p} - v_{1,p} \qquad (3)$$

In un urto centrale elastico la velocità relativa delle due particelle prima dell'urto (velocità di avvicinamento) è opposta alla velocità relativa delle particelle dopo l'urto (velocità di allontanamento).

Risolvendo ora il sistema di equazioni la (3) e la (1'):

$$v_{1,d} - v_{2,d} = v_{2,p} - v_{1,p} \qquad (3)$$

$$m_1(v_{1,p} - v_{1d}) = m_2(v_{2d} - v_{2,p}) \qquad (1')$$

si ottengono le velocità delle particelle dopo l'urto:

$$v_{1d} = [(m_1 - m_2)\, v_{1p} + 2\, m_2 v_{2p}]/(m_1 + m_2) \qquad (4)$$

e

$$v_{2d} = [(m_2 - m_1)\, v_{2p} + 2\, m_1 v_{1p}]/(m_1 + m_2) \qquad (5)$$

Casi particolarmente interessanti:

1) masse uguali $m_1 = m_2$: dalle (4) + (5) si ha:

$$v_{1d} = v_{2p}$$
$$v_{2d} = v_{1p}$$

cioé durante l'urto i due corpi si scambiano le velocità.

2) massa m_2 inizialmente in quiete: dalle (4) + (5) si ha:

$$v_{1d} = [(m_1 - m_2)/(m_1+m_2)]v_{1p}$$

$$v_{2d} = [2m_1/(m_1+m_2)]v_{1p}$$

a) se $m_1 = m_2$ si ha $v_{1d} = 0$ e $v_{2d} = v_{1p}$

b) se $m_1>m_2$, allora v_{1d} e v_{2d} hanno lo stesso segno ma $v_{2d} > v_{1d}$, cioè la particella urtante procede anche dopo l'urto nel verso iniziale ma con velocità minore;

c) se $m_1<m_2$, allora $v_{1d} <0$ ed è in modulo $< v_{1p}$, cioé la particella di massa m_1 rimbalza con velocità ridotta.

d) se $m_2 = \infty$, $v_{2d} = 0$ e $v_{1d} = - v_{1p}$, cioè rimbalza elasticamente.

Esercizi sugli urti elastici centrali:

1) pendolo semplice di massa *m* e lunghezza *L*, lasciato andare dalla configurazione orizzontale, urta un blocco di massa *M* (*M*>>*m*) istantaneamente in quiete sul piano orizzontale liscio.
2) blocco di massa *M* lanciato contro una particella di massa *m* posta in quiete alla base di un profilo circolare di raggio *R*.

Urti centrali fra particelle libere nel sistema C:

Per quanto riguarda l'energia cinetica interna, usando la relazione di Konig per l'energia cinetica, si ha:

$$E_{k,p} = ½m_1v_{i,p}^2+½ m_2v_{2,p}^2 = ½ Mv_{CM,p}^2 +E'_{k,p} = E_{k,CM} + E_{k,p}^{INT}$$

$$E_{k,d} = ½m_1v_{i,d}^2+½ m_2v_{2,d}^2= ½ Mv_{CM,d}^2 +E'_{k,d} = E_{k,CM} + E_{k,d}^{INT}$$

E dato che l'energia cinetica del CM del sistema si conserva prima e dopo l'urto ($E_{k,CM}$ non cambia) si avrà:

Urto completamente anelastico: ($E'_{k,d} = 0$)

Dopo l'urto le due particelle rimangono attaccate e se ne vanno con la velocità del centro di massa.

Conservazione della quantità di moto:

$$\mathbf{P'}_{S,p} = \mathbf{P'}_{S,d} \quad \Rightarrow \quad m_1\mathbf{v'}_{1,p} + m_2\mathbf{v'}_{2,p} = \mathbf{0}$$

Mentre per l'energia dissipata, si ha:

$$E_D = E'_{k,d} - E'_{k,p} = 0 - E_{k,p}^{INT} = - E_{k,p}^{INT}$$

<u>Urto perfettamente elastico</u>: ($E'_{k,p} = E'_{k,d}$)

Conservazione della quantità di moto totale:

$\mathbf{P'}_{S,p} = \mathbf{P'}_{S,d}$ ossia: $m_1\mathbf{v'}_{1,p} + m_2\mathbf{v'}_{2,p} = m_1\mathbf{v'}_{1,d} + m_2\mathbf{v'}_{2,d}$ (1)

N.B.: $\mathbf{P'}_{S,p} = m_1\mathbf{v'}_{1.p} + m_2\mathbf{v'}_{2,p} = 0$ e $\mathbf{P'}_{S,d} = m_1\mathbf{v'}_{1d} + m_2\mathbf{v'}_{2d} = 0$

cioè: $m_1\mathbf{v'}_{1,p} = - m_2\mathbf{v'}_{2,p}$ e $m_1\mathbf{v'}_{1,d} = - m_2\mathbf{v'}_{2,d}$ (dato che $\mathbf{p'}_1 = - \mathbf{p'}_2$)

Per quanto riguarda l'energia cinetica interna si ha $E'_{k,d} = E'_{k,p}$:

$$½m_1 v'^2_{1,p} + ½m_1 v'^2_{1,p} = ½m_1 v'^2_{1,d} + ½m_2 v'^2_{2,d}$$

Questa è la seconda equazione scalare da accoppiare alla:

$$m_1\mathbf{v'}_{1,p} + m_2\mathbf{v'}_{2,p} = m_1\mathbf{v'}_{1,d} + m_2\mathbf{v'}_{2,d} \qquad (1)$$

(che va proiettata lungo l'asse che individua la direzione del moto delle due particelle che si urtano centralmente) per risolvere il problema della determinazione di $v'_{1,d}$ e $v'_{2,d.}$

Da (1) si ha: $m_1(v'_{1,p} - v'_{1d}) = m_2(v'_{2d} - v'_{2,p})$ (1')

Da (2) si ha: $½m_1 (v'^2_{1,p} - v'^2_{1,d}) = ½m_2 (v'^2_{2,d} - v'^2_{2,p})$, cioé

$m_1 (v'_{1,p} - v'_{1,d}) (v'_{1,p} + v'_{1,d}) = m_2 (v'_{2,d} - v'_{2,p}) (v'_{2,d} + v'_{2,p})$

e ricordando la (1') si ha: $(v'_{1,p} + v'_{1,d}) = (v'_{2,d} + v'_{2,p})$, cioè:

$$v'_{1,d} - v'_{2,d} = v'_{2,p} - v'_{1,p} \qquad (3)$$

In un urto centrale elastico la velocità relativa delle due particelle prima dell'urto (velocità di avvicinamento) è opposta alla velocità relativa delle particelle dopo l'urto (velocità di allontanamento).

Risolvendo ora il sistema di equazioni la (3) e la (1'):

$$v'_{1,d} - v'_{2,d} = v'_{2,p} - v'_{1,p} \tag{3}$$

$$m_1(v'_{1,p} - v'_{1,d}) = m_2(v'_{2,d} - v'_{2,p}) \tag{1'}$$

si ottengono le velocità delle particelle dopo l'urto:

$$v_{1d} = [(m_1 - m_2)\, v_{1p} + 2\, m_2 v_{2p}]/(m_1 + m_2) \tag{4}$$

e

$$v_{2d} = [(m_2 - m_1)\, v_{2p} + 2\, m_1 v_{1p}]/(m_1 + m_2) \tag{5}$$

A) Urti fra particelle libere e corpi rigidi liberi.

Urto elastico: oltre alla conservazione della quantità di moto totale e dell'energia cinetica totale del sistema durante l'urto, bisogna considerare anche la conservazione del momento angolare intrinseco.

Urto completamente anelastico: si ha la conservazione della quantità di moto totale del sistema durante l'urto, e anche la conservazione del momento angolare intrinseco.

B) Urti fra particelle libere e corpi rigidi vincolati

Urto elastico: oltre alla conservazione dell'energia cinetica totale del sistema durante l'urto, si conserva anche il momento angolare rispetto al punto O a cui è vincolato il corpo rigido.

Urto perfettamente anelastico: si conserva solamente il momento angolare totale rispetto al punto O in cui è imperniato il corpo urtato. L'energia dissipata nell'urto è data dalla variazione dell'energia propria U del sistema.