Zeri di funzione

Esercizi, Calcolo Numerico e laboratorio, a.a. 2016/2017

Giacomo Albi

Esercizi `15.03`

Vogliamo trovare uno zero della funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, sotto le ipotesi che $f \in C^0([a, b])$ e $f(a)f(b) < 0$. Definiamo $\xi \in (a, b)$ tale soluzione, i.e. $f(\xi) = 0$, allora

1. dato E_k, l'errore del metodo del *metodo della bisezione* al k-esimo passo, come

$$E_k = |x_k - \xi|,$$

   con $x_k = (a_k + b_k)/2$, e $[a_k, b_k]$ l'intervallo separatore.

   - Mostrare che $E_k \leq b_k - a_k = (b - a)/2^k$.
   - Vogliamo imporre una certa tolleranza ε sull'errore, i.e. $E_k \leq \varepsilon$. Mostrare che per migliorare di una cifra significativa la tolleranza ($E_k \leq \varepsilon/10$) sono necessarie in media 3.3 iterazioni aggiuntive.

2. Modificare il metodo della bisezione definendo x_k ad un terzo dell'ampiezza dell'intervallo dall'estremo in cui il valore assoluto della funzione è minore. In altre parole definiamo ad ogni $k = 1, 2, \ldots$

$$x_k = \begin{cases} a_k + \frac{1}{3}(b_k - a_k), & \text{se } |f(a_k)| \leq |f(b_k)| \\ a_k + \frac{2}{3}(b_k - a_k), & \text{se } |f(a_k)| > |f(b_k)| \end{cases}$$

   - Riscrivere il metodo della bisezione con questa modifica.
   - Discutere come cambia l'ordine di convergenza del metodo.

Esercizi `17.03`

Dato il metodo della bisezione asimmetrico, vedi il punto 2. del precedente esercizio.

1. Modificare il codice `main_bisezione.m` in modo da ottenere il metodo modificato `main_bisezione_asimmetrico.m`, (fatto a laboratorio).

2. Aggiungere una condizione che controlli che il metodo della bisezione sia applicabile, i.e. $f(a) * f(b) < 0$, prima di lanciare il ciclo `while` e se non è soddisfatta fermare il codice (Hint: usare il comando `return`).

3. Studiare come cambia la convergenza del metodo per le seguenti funzioni:

   - $1 - x^2 + 5\sin(4x^2)$ nell' intervallo $[-2, 0.5]$.
   - $y = x^3 - 5x - 1$ nell' intervallo $[-2, 0.5]$.

4. Confrontare la convergenza dei due metodi al variare della funzione. Quante iterazioni impiegano per raggiungere la tolleranza $\varepsilon = 1e-6$, e $\varepsilon = 1e-8$?

5. Modificare il codice `main_bisezione_asimmetrico.m` introducendo un parametro $p \in [0, 1]$, in modo che il punto di bisezione sia a distanza $p * (b - a)$ dall'estremo dell'intervallo separatore dove la funzione assume valore assoluto minore.

Esercizi `22.03`

1. Trovare un intervallo separatore opportuno, dove applicare il metodo della bisezione, per le seguenti funzioni:
$$f(x) = \ln(x) - 5 + x$$
$$f(x) = x^2 - 10x + 23$$

2. Usare il metodo della bisezione per trovare solution accurate fino a $\varepsilon = 10^{-2}$ per
$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0, \qquad \text{in } [0, 1].$$
confrontare i valori con quelli ottenuti il codice `main_bisezione.m`.

3. Determinare il numero di iterazioni necessarie per raggiungere un'approssimazione di accuratezza $\varepsilon = 10^{-3}$ per la soluzione di
$$f(x) = x^3 - x - 1 = 0, \qquad \text{in } [1, 4],$$
confrontare i valori con quelli ottenuti il codice `main_bisezione.m`.

4. Trovare lo zero della funzione
$$f(x) = 3\ln(x) - x \qquad \text{in } [1, e]$$
approssimando la soluzione con

   - 4 passi della bisezione,
   - 2 passi delle secanti,

- 2 passi del metodo di Newton.

5. Un proiettile viene lanciato ad una velocitá v_0 con un'inclinazione α in un tunnel di altezza h e raggiunge la massima gittata quando α è tale che

$$f(\alpha) = \sin(\alpha) - \sqrt{2gh/v_0^2} = 0.$$

con g la costante di gravità. Si calcoli α con il metodo di Newton quando $v_0 = 10m/s$ e $h = 1m$.

Esercizi `31.03`

1. Confrontare al variare del criterio di arresto la convergenza del metodo di Newton per le seguenti funzioni:

   - $1 - x^2$ in $[-2, 0]$.
   - $1 - x^2 + 5\sin(4x^2)$ in $[-1.5, 0.5]$.
   - $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{1 + M|x|}$ in $[0, 2]$ con $M = 1$ e $M = 10^4$.

2. Modificare il codice per trovare gli zeri della funzione:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 = 0$$

   trovare gli intervalli separatori (svolto in classe), e confrontare secanti, newton e bisezione