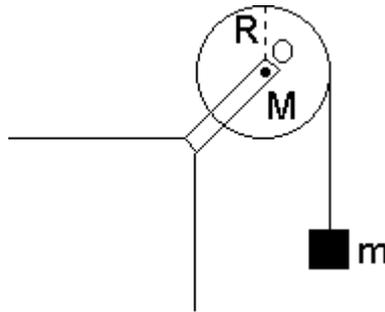


Dinamica del corpo rigido

Problema n. 1: Un disco rigido, omogeneo, di massa $M = 2.5 \text{ kg}$ e raggio $R = 0.2 \text{ m}$ è imperniato su un asse orizzontale fisso z , passante per il suo centro di massa O e perpendicolare al piano del disco. Un blocco di massa $m = 1.2 \text{ kg}$ è appeso a un filo inestensibile e privo di massa, avvolto attorno al bordo del disco. Il sistema è mantenuto in quiete, con il filo teso, tramite un opportuno dispositivo (freno a disco) che blocca la rotazione del disco (vedi figura). All'istante $t=0$ il dispositivo viene rimosso e il blocco inizia a scendere per l'azione della forza peso, mettendo simultaneamente in rotazione il disco. Assumendo che il filo non slitti e che il disco ruoti attorno all'asse z senza attrito, determinare:

- (a) l'accelerazione di caduta del blocco; [$\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{g} m/(m+M/2)$]
- (b) la tensione del filo; [$\mathbf{T} = - (mM/2)\mathbf{g}/(m+M/2)$]
- (c) la reazione vincolare sviluppata dal perno passante per O durante il moto di caduta del corpo m ; Calcolare, inoltre, in corrispondenza dell'istante in cui il blocco è sceso di $H = 2.4 \text{ m}$:
- (d) l'energia cinetica del sistema disco + blocco; [$\Delta E_k = -\Delta E_p^{EXT}$]
- (e) l'energia cinetica di rotazione del disco;
- (f) le velocità del centro di massa del sistema disco + blocco;
- (g) l'energia cinetica interna del sistema disco + blocco;
- (h) il momento angolare totale del sistema disco + blocco rispetto al punto O ;
- (i) il modulo dell'accelerazione di un punto del bordo del disco. [$a = a_T^2 + a_N^2$]



Problema n. 2: Un'asta rigida sottile e omogenea AB di massa $M = 10 \text{ Kg}$ e di lunghezza $L = 1 \text{ m}$ può ruotare senza attrito nel piano verticale attorno ad un asse fisso passante per il suo estremo A . All'istante $t=0$ l'asta viene abbandonata con velocità iniziale nulla dalla posizione orizzontale. Calcolare:

- (a) la traiettoria del suo centro di massa durante il moto successivo; [$x_{CM}^2 + y_{CM}^2 = (L/2)^2$]
- (b) l'equazione del moto dell'asta; [$M\mathbf{a}_{CM} = M\mathbf{g} + \mathbf{R}$; $I_z\alpha = - (L/2) Mg \sin \theta$]
- (c) la sua accelerazione angolare quando forma un angolo θ con la direzione verticale; [$\alpha = - (3g/2L) \sin \theta$]
- (d) la velocità angolare dell'asta in tale configurazione; [$\omega^2 = (3g/L) \cos \theta$]
- (e) la reazione vincolare quando l'asta si trova nel punto più in basso.

Problema n. 3: Un sistema è costituito da un disco rigido omogeneo di massa $M = 2 \text{ Kg}$ e di raggio $R = 20 \text{ cm}$ imperniato su di un asse orizzontale fisso passante per suo centro C e disposto perpendicolarmente al piano del disco. Sul bordo del disco può scorrere una fune inestensibile e di massa trascurabile vincolata ad un'estremità ad un punto fisso O tramite una molla di costante elastica $k = 300 \text{ N/m}$ e massa trascurabile. All'altro estremo della fune pende un corpo di massa m

= 1 kg. Inizialmente il corpo è mantenuto in quiete tramite un opportuno dispositivo, con la fune tesa e la molla in posizione di riposo. Al tempo $t=0$ il dispositivo viene rimosso e il corpo inizia a muoversi in direzione verticale. Nell'ipotesi che la fune non scivoli sul bordo del disco, si chiede di:

- (a) scrivere l'equazione del moto del corpo di massa m ; [$Ma = Mg - T$; $I_z \alpha = RT - kRx$]
- (b) calcolare il periodo delle sue oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio; [$T = 2\pi / \sqrt{2k/(2m+M)}$]
- (c) la massima tensione della fune durante il moto oscillatorio della massa m .

Problema n. 4: Un disco rigido, sottile, omogeneo, di massa $M = 6$ kg e raggio $R_1 = 20$ cm ruota nel piano orizzontale con velocità angolare costante $\omega_1 = 12$ rad/s attorno ad un asse verticale fisso passante per il punto O , che si trova a distanza $d = R/2$ dal baricentro del disco. Calcolare:

- (a) la forza che deve essere esercitata dai supporti sull'asse di rotazione; [$F_N = Md\omega^2 = 86.4$ N]
- (b) il momento della forza peso del disco; [$\tau_O^W = Mgd = 5.9$ N]
- (c) l'energia cinetica del disco. [$E_k = I_z \omega^2 / 2 = 12.96$ J]

Se, partendo da fermo, il disco ha raggiunto la velocità di regime in 4 s, sotto l'azione di un momento di intensità costante, determinare:

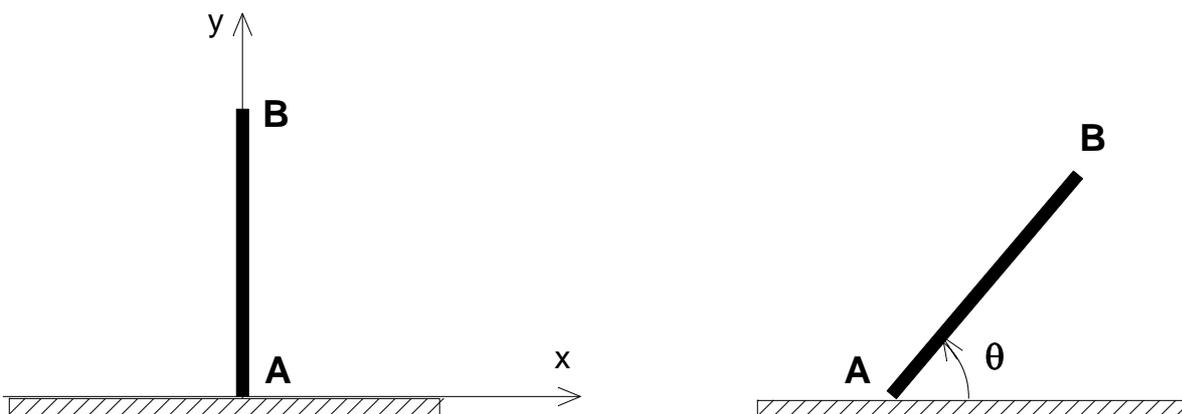
- (d) il valore di tale momento; [$\tau_O(\theta) = \Delta E_k / \Delta \theta = I_z \alpha = 0.54$ Nm]
- (e) l'accelerazione tangenziale del CM del disco durante la fase di accelerazione. [$a_{CM} = d_{CM} \alpha = 0.3$ m/s²].

Problema n. 5: Un'asta AB rigida sottile omogenea di massa $M = 2$ kg e di lunghezza $L = 1.5$ m è appoggiata in posizione di equilibrio instabile su un piano orizzontale liscio (v. figura). Ad un certo istante viene applicato all'estremità superiore dell'asta B , un impulso parallelo al piano, di intensità trascurabile, che fa cadere l'asta. Determinare:

- 1 - la traiettoria del centro di massa durante il moto di caduta dell'asta;
- 2 - la velocità angolare di rotazione dell'asta in funzione dell'angolo θ .

Calcolare nell'istante in cui l'asse dell'asta forma un angolo di 30° con il piano orizzontale:

- 3 - la velocità dei punti estremi A e B dell'asta;
- 4 - la reazione vincolare.



N.B.: Si assuma il sistema di riferimento indicato in figura. Delle grandezze vettoriali si diano sempre tutte le componenti. Riportare nello spazio sottostante i risultati in forma simbolica e, laddove richiesto, anche in forma di valori numerici.