<u>Moto curvilineo piano in un sistema di coordinate polari Orθ</u>

Legge oraria del moto curvilineo piano in un sistema Orθ,t:

$$\mathbf{r}(t) = r(t)\, \mathbf{u_r}(t).$$

Derivazione del vettore velocità istantanea $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{r}(t)/dt$:

$$\mathbf{v}(t) = d\mathbf{r}(t)/dt = d/dt[r(t)\, \mathbf{u_r}(t)]$$
$$= [dr(t)/dt]\, \mathbf{u_r}(t) + r(t)\, [d\mathbf{u_r}(t)/dt]$$

Ma $d\mathbf{u_r}(t)/dt = (d\theta/dt)\, \mathbf{u_\theta}(t)$, e quindi:

$$\mathbf{v}(t) = [dr(t)/dt]\, \mathbf{u_r}(t) + r(t)\, [(d\theta/dt)\, \mathbf{u_\theta}(t)]$$

Vettore velocità vettoriale istantenea in coordinate polari:

$$\mathbf{v}(t) = v_r(t)\, \mathbf{u_r}(t) + v_\theta(t)\, \mathbf{u_\theta}(t)$$

Componenti radiale $v_r(t)$ e trasversale $v_\theta(t)$ della velocità:

$$v_r(t) = dr(t)/dt \qquad e \qquad v_\theta(t) = r(t)(d\theta/dt).$$

Significato geometrico delle componenti radiale e trasversale di **v**: $v_r(t)$ esprime la variazione istantanea della distanza, misurata lungo la direzione radiale, del punto materiale dal polo O, mentre $v_\theta(t)$ rappreenta la variazione istantanea della posizione del punto materiale dovuta alla sua precessione attorno al polo O.

N.B.: Il vettore velocità istantanea $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ nel caso di moto piano riferito a due sistemi diversi Oxy (sistema in coordinate cartesiane ortogonali) e Orθ (sistema in coordinate polari) avrà invece due rappresentazioni distinte:

$$\mathbf{v}(t) = v_x(t)\, \mathbf{i} + v_y(t)\, \mathbf{j}$$

$$v(t) = v_r(t)\, \mathbf{u_r}(t) + v_\theta(t)\, \mathbf{u_\theta}(t)$$

Relazione fra le componenti della velocità espressa in coordinate cartesiane e polari:

$$\mathbf{v}(t) = v_x(t)\,\mathbf{i} + v_y(t)\,\mathbf{j} = v_r(t)\,\mathbf{u_r}(t) + v_\theta(t)\,\mathbf{u_\theta}(t) =$$
$$= (dr(t)/dt)\,(\cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j}) + r(t)(d\theta/dt)\,(-\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}) =$$
$$[(dr(t)/dt)\cos\theta - r(t)(d\theta/dt)\sin\theta]\,\mathbf{i} + [dr(t)/dt)\sin\theta + r(t)(d\theta/dt)\cos\theta]\,\mathbf{j}$$

e quindi:

$$v_x(t) = [(dr(t)/dt)\cos\theta - r(t)\,(d\theta/dt)\sin\theta]$$

$$v_y(t) = [(dr(t)/dt)\sin\theta + r(t)\,(d\theta/dt)\cos\theta]$$

N.B.: A dispetto delle due diverse rappresentazioni, il modulo v(t) del vettore velocità istantanea **v**(t) dev'essere indipendente dalla rappresentazione adottata:

$$v_r^2 + v_\theta^2 = v(t)^2 = v_x^2 + v_y^2$$

come conseguenza dell'invarianza delle proprietà intrinseche di un vettore dal sistema di riferimento adottato: i.e., invarianza del modulo, direzione e verso di un vettore rispetto a due diversi sistemi di riferimento!

Derivazione del vettore accelerazione istantanea $\mathbf{a}(t) = d\mathbf{v}(t)/dt$:

$$\mathbf{a}(t) = d\mathbf{v}(t)/dt = d/dt[\,v_r(t)\,\mathbf{u_r}(t) + v_\theta(t)\,\mathbf{u_\theta}(t)] =$$
$$= d/dt\,[(dr(t)/dt)\,\mathbf{u_r}(t) + r(t)\,(d\theta/dt)\,\mathbf{u_\theta}(t)] =$$
$$= [d^2r(t)/dt^2]\,\mathbf{u_r}(t) + (dr(t)/dt)\,[d\mathbf{u_r}(t)/dt] +$$
$$[dr(t)/dt]\,(d\theta/dt)\,\mathbf{u_\theta}(t) + r(t)\,[d^2\theta/dt^2]\,\mathbf{u_\theta}(t) + r(t)\,(d\theta/dt)\,[d\mathbf{u_\theta}(t)/dt]$$

Ora $d\mathbf{u_r}(t)/dt = +\,(d\theta/dt)\,\mathbf{u_\theta}(t)$, $d\mathbf{u_\theta}(t)/dt = -\,(d\theta/dt)\,\mathbf{u_r}(t)$, e quindi:

$$\mathbf{a}(t) = [d^2r(t)/dt^2 - r(t)\,(d\theta/dt)^2]\,\mathbf{u_r}(t) +$$
$$+ [2\,(dr(t)/dt)\,(d\theta/dt) + r(t)\,(d^2\theta/dt^2)]\,\mathbf{u_\theta}(t) =$$
$$= a_r(t)\,\mathbf{u_r}(t) + a_\theta(t)\,\mathbf{u_\theta}(t).$$

Componenti radiale e trasversale dell'accelerazione:

$$a_r(t) = d^2r(t)/dt^2 - r(t)\,(d\theta/dt)^2$$

$$a_\theta(t) = 2\,(dr(t)/dt)\,(d\theta/dt) + r(t)\,(d^2\theta/dt^2)$$

Significato geometrico delle componenti radiale e trasversale di **a**: $a_r(t)$ esprime la variazione istantanea del vettore velocità lungo la direzione radiale, mentre $a_\theta(t)$ esprime la variazione istantanea del vettore velocità dovuta al moto di precessione attorno al polo O.

Calcolo del modulo dell'accelerazione istantanea a(t): è il modulo del vettore accelerazione istantanea è indipendente dalla rappresentazione adottata:

$$a_r^2 + a_\theta^2 = a(t)^2 = a_x^2 + a_y^2$$

Relazione fra le componenti di **a** in coordinate cartesiane e polari.

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}(t) &= a_r(t)\,\mathbf{u_r}(t) + a_\theta(t)\,\mathbf{u_\theta}(t) = \\
&= [d^2r(t)/dt^2 - r(t)\,(d\theta/dt)^2]\,\mathbf{u_r}(t) + \\
&+ [2\,(dr(t)/dt)\,(d\theta/dt) + r(t)\,(d^2\theta/dt^2)]\,\mathbf{u_\theta}(t) = \\
&= [d^2r(t)/dt^2 - r(t)\,(d\theta/dt)^2]\,(\cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j}) + \\
&+ [2\,(dr(t)/dt)\,(d\theta/dt) + r(t)\,(d^2\theta/dt^2)]\,(\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}) = \\
&\{[d^2r(t)/dt^2 - r(t)\,(d\theta/dt)^2]\cos\theta + [2\,(dr(t)/dt)\,(d\theta/dt) + r(t)\,(d^2\theta/dt^2)]\sin\theta\}\,\mathbf{i} + \{[d^2r(t)/dt^2 - r(t)\,(d\theta/dt)^2]\sin\theta + [2\,(dr(t)/dt)\,(d\theta/dt) + r(t)\,(d^2\theta/dt^2)]\cos\theta\}\,\mathbf{j} = a_x(t)\,\mathbf{i} + a_y(t)\,\mathbf{j}
\end{aligned}$$

e quindi:

$$a_x(t) = [d^2r(t)/dt^2 - r(t)\,(d\theta/dt)^2]\cos\theta + [2\,(dr(t)/dt)\,(d\theta/dt) + r(t)\,(d^2\theta/dt^2)]\sin\theta$$

$$a_y(t) = [d^2r(t)/dt^2 - r(t)\,(d\theta/dt)^2]\sin\theta + [2\,(dr(t)/dt)\,(d\theta/dt) + r(t)\,(d^2\theta/dt^2)]\cos\theta$$

Moto circolare

Moto circolare in coordinate curvilinee O's:

$$s(t) = R\theta(t).$$

Derivazione della velocità angolare:

$$\omega(t) = d\theta/dt = (1/R)\, ds/dt = ds/Rdt$$

e dell'accelerazione angolare:

$$\alpha(t) = d^2\theta/dt^2 = (1/R)\, d^2s/dt^2 = d^2s/Rdt^2$$

Moto circolare uniforme ($\omega = \omega_0$),
e uniformemente accelerato ($\alpha = \alpha_0$) e vario ($\alpha = \alpha(t)$).

Derivazione delle leggi orarie della velocità angolare e dello spostamento angolare, note le condizioni iniziali: t_0, $\omega(t_0) = \omega_0$ e $\theta(t_0) = \theta_0$!

Legge oraria del moto circolare uniforme $\omega(t) = \omega_0$:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0\,(t-t_0)$$

Leggi orarie del moto circolare uniformemente accelerato: $\alpha = \alpha_0$

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha_0\,(t - t_0)$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0\,(t-t_0) + ½\,\alpha_0\,(t-t_0)^2$$

Vedi: Esercizi sul moto unidimensionale circolare

Moto circolare in coordinate cartesiane Oxy

Componenti cartesiane del vettore posizione istantanea: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$

$$x(t) = R\cos\theta(t) \qquad\qquad y(t) = R\sin\theta(t)$$

Calcolo delle componenti cartesiane della velocità: **v**(t)

$$v_x(t) = -R\sin\theta(t)\, d\theta/dt \qquad v_y(t) = R\cos\theta(t)\, d\theta/dt$$

N.B.: $\mathbf{v}(t)\perp\mathbf{r}(t)$, infatti $\mathbf{v}(t)\bullet\mathbf{r}(t) = 0$ ($\Leftarrow v_x x+v_y y =0$).

Calcolo delle componenti cartesiane dell'accelerazione: **a**(t)

$$a_x(t) = -R\cos\theta(t)\,(d\theta/dt)^2 - R\sin\theta(t)\, d^2\theta/dt^2$$
$$a_y(t) = -R\sin\theta(t)\,(d\theta/dt)^2 + R\cos\theta(t)\, d^2\theta/dt^2$$

N.B.: Nel caso di moto circolare non–uniforme, dove **a**(t) **non** è $\perp$ a **v**(t), $\mathbf{a}(t)\cdot\mathbf{v}(t) = a_T(t)\, v(t) = R\alpha\, R\omega \neq 0$.

Infatti:

$a_x(t)v_x(t) + a_y(t)\, v_y(t) = [-R\cos\theta(t)\,(d\theta/dt)^2 - R\sin\theta(t)\,(d^2\theta/dt^2)]\,[-R\sin\theta(t)\,(d\theta/dt)] + [-R\sin\theta(t)\,(d\theta/dt)^2 + R\cos\theta(t)\,(d^2\theta/dt^2)][+R\cos\theta(t)\,(d\theta/dt)] = R^2\,(d^2\theta/dt^2)\,(d\theta/dt) = R\,(d^2\theta/dt^2)\, R\,(d\theta/dt) = R\alpha\, R\omega$.

Calcolo del modulo di **r**(t), **v**(t) e **a**(t):

$$r(t)^2 = x^2+ y^2 = [R\cos\theta(t)]^2 +[R\sin\theta(t)]^2 = R^2$$

$$v(t)^2 = v_x^2 + v_y^2 = [-R\sin\theta(t)\, d\theta/dt]^2+[R\cos\theta(t)\, d\theta/dt]^2$$
$$= R^2\,(d\theta/dt)^2 = R^2\omega^2$$

$$a(t)^2 = a_x^2+ a_y^2 = [-R\cos\theta(t)\,(d\theta/dt)^2 - R\sin\theta(t)d^2\theta/dt^2]^2$$
$$[-R\sin\theta(t)\,(d\theta/dt)^2 + R\cos\theta(t)\, d^2\theta/dt^2]^2 =$$
$$= R^2\omega^4 + R^2\alpha^2$$

N.B.: Significato dei termini $R\alpha$ e $R\omega^2$. Ricordando l'espressione dell'accelerazione scalare istantanea valida per il moto curvilineo unidmensionale e che è data dalla variazione istantanea della velocità scalare istantanea: $a(t) = dv(t)/dt = d^2s/dt^2 = R\, d^2\theta/dt^2$, dovrà essere $R\alpha = a_T$, mentre l'altra componente $R\omega^2$ dovrà essere associata alla variazione istantanea di direzione del vettore velocità istantanea, essendo il moto curvilineo, e quindi dovrà essere $R\omega^2 = a_N$.

<u>Moto circolare in coordinate polari</u> $Or\theta,t$

Relazione fra i vettori **v** e **a** e i versori $\mathbf{u}_r$, $\mathbf{u}_\theta$, $\mathbf{u}_T$ e $\mathbf{u}_N$.

N.B.: $\mathbf{v}(t) = ds/dt\ \mathbf{u}_T(t) = R\ d\theta/dt\ \mathbf{u}_\theta(t) \Rightarrow \mathbf{u}_T = \mathbf{u}_\theta$!

[Velocità come vettore tangente alla traiettoria γ: $\mathbf{v}_T(t) = ds/dt\ \mathbf{u}_T(t)$) e come vettore di direzione trasversale: $\mathbf{v}_\theta(t) = Rd\theta/dt\ \mathbf{u}_\theta(t)$].

N.B.: Il modulo di **v**(t) coincide con la velocità scalare istantanea:

$$v(t) = [ds(t)/dt] = [Rd\theta/dt];$$

<u>Calcolo del modulo dell'accelerazione</u>: già sappiamo che:

$$a(t)^2 = (d^2x/dt^2)^2 + (d^2y/dt^2)^2 = (R\alpha)^2 + (R\omega^2)^2.$$

N.B.: Invarianza del modulo di **a**(t) dal sistema di riferimento:

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 = a_T^2 + a_N^2 = a_r^2 + a_\theta^2$$

<u>Moto circolare: componenti dell'accelerazione</u>.

In coordinate intrinseche: $(\mathbf{u}_T,\mathbf{u}_N)$:

$$a_T(t) = dv(t)/dt = d^2s/dt^2 = R\ \alpha(t)$$
$$a_N(t) = v^2(t)/\rho = (ds/dt)^2/R = R\ \omega^2(t);$$

In coordinate polari: $\mathbf{r}(t) = R\ \mathbf{u}_r(t)$:

$$a_r(t) = -\ r(t)\ (d\theta/dt)^2 = -\ R\ \omega^2(t)$$
$$a_\theta(t) = r(t)\ (d^2\theta/dt^2) = R\ \alpha(t).$$

N.B.: $\mathbf{a}_T = \mathbf{a}_\theta$ e $\mathbf{a}_N = -\mathbf{a}_r$!

Potremmo anche scrivere:

$$\mathbf{a}(t) = [d^2s/dt^2]\ \mathbf{u}_T(t) + [(ds/dt)^2/R]\ \mathbf{u}_N(t)$$
$$= [Rd^2\theta/dt^2]\ \mathbf{u}_\theta(t) - R\ [(d\theta/dt)^2]\ \mathbf{u}_r(t)$$

Moto circolare uniforme

Legge oraria del moto circolare uniforme in un sistema Orθ**,**t:

$$\mathbf{r}(t) = r(t)\ \mathbf{u_r}(t) = R\ \mathbf{u_r}(t).$$

N.B.: $r(t) = R$; $d\theta/dt = \omega_0$ = costante!

Dato che il moto è uniforme $\omega(t) = \omega_0$ si avrà $d^2\theta/dt^2 = 0$ e quindi $a_T = a_\theta = 0$, mentre $a_N = R\ \omega_0^2$ e $a_r = -R\ \omega_0^2$

In definitiva: $\mathbf{a}(t) = a_N\ \mathbf{u}_N(t) = R\ \omega_0^2\mathbf{u}_N(t)$
e $\mathbf{a}(t) = a_r\ \mathbf{u}_r(t) = -R\ \omega_0^2\mathbf{u}_r(t)$

<u>N.B.: Componenti cartesiane dell'accelerazione</u>: **a**(t)

$$a_x(t) = -R\cos\theta(t)\ (d\theta/dt)^2 = -\omega_0^2\ x(t)$$

$$a_y(t) = -R\sin\theta(t)\ (d\theta/dt)^2 = -\omega_0^2\ y(t)$$

In definitiva, anche: $a_x(t) = -\omega_0^2\ x(t)$ e $a_y(t) = -\omega_0^2\ y(t)$.

Cioè nel moto circolare uniforme le componenti cartesiane dell’accelerazione sono anti–parallele alle componenti cartesiane del vettore posizione (cioè del vettore spostamento dall’origine del sistema di riferimento Oxy), e, di fatto, rappresentano le equazioni di due moti armonici semplici sui due assi ortogonali x e y.

Pertanto, atteso il significato di componenti di un vettore, anche il vettore **a**(t) risultante avrà la direzione del vettore **r**(t) <u>ma verso</u>

opposto. Si può quindi affermare che nel moto circolare uniforme si ha un'accelerazione normale alla direzione istantanea del moto (individuata dal vettore velocità istantanea, che è sempre tangente alla traiettoria) o centripeta (perché diretta verso il centro di rotazione)

Calcolo del modulo dell'accelerazione:

$$a(t)^2 = a_x^2 + a_y^2 = \omega_0^4[x(t)^2 + y(t)^2] = R^2\omega_0^4 = a_N^2 = a_r^2.$$

Invarianza del modulo di **a**(t) dal sistema di riferimento:

$$a^2(t) = a_x^2 + a_y^2 = a_T^2 + a_N^2 = a_r^2 + a_\theta^2$$

che nel caso del moto circolare uniforme si riduce a:

$$a^2(t) = a_x^2 + a_y^2 = a_N^2 = a_r^2$$

dato che $a_T = a_\theta = 0$, perché $d^2s/dt^2 = R\, d^2\theta/dt^2 = R\,\alpha = 0$.

Calcolo del modulo di **a**(t):

$a(t)^2 = a_x^2 + a_y^2 = a_N^2 = a_r^2$
$= [- R \cos\theta(t)\, (d\theta/dt)^2]^2 + [- R \sin\theta(t)\, (d\theta/dt)^2]^2 =$
$= R^2 [\cos^2\theta(t) + \sin^2\theta(t)]\, [(d\theta/dt)^2]^2 = R^2 (d\theta/dt)^4 = R^2\omega_0^4$

N.B.: nel moto circolare uniforme, dove c'è solo l'accelerazione centripeta, deve essere $\mathbf{a}(t)\perp\mathbf{v}(t)$, cioé $\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{v}(t) = 0$ ($a_x v_x + a_y v_y = 0$).

Verifica:
Da $v_x(t) = - R \sin\theta(t)\, d\theta/dt \quad v_y(t) = + R \cos\theta(t)\, d\theta/dt$
e da $a_x(t) = - R \cos\theta(t)\, (d\theta/dt)^2 \quad a_y(t) = - R \sin\theta(t)\, (d\theta/dt)^2$

$a_x(t)v_x(t)+ a_y(t)\, v_x(t) = [- R \cos\theta(t)\, (d\theta/dt)^2][- R \sin\theta(t)\, (d\theta/dt)] +$
$[- R \sin\theta(t)\, (d\theta/dt)^2][+R \cos\theta(t)\, (d\theta/dt)] =$
$R^2\cos\theta(t) \sin\theta(t)\, (d\theta/dt)^3 - R^2 \sin \theta(t) \cos \theta(t)\, (d\theta/dt)^3 = 0$