

Moto nello spazio tridimensionale

La localizzazione spazio-temporale di un ‘evento’

(es.: il punto materiale P si trova in un certo posto ad un dato istante con una data velocità) richiede :

- la definizione di un **sistema di coordinate**

⇒ definizione di un punto arbitrario “**origine**” O e di un **sistema di assi** rispetto ai quali misurare gli spostamenti (distanze e/o angoli)

Nella “**Meccanica classica**” (“newtoniana”), le proprietà geometriche dello spazio sono le stesse (quelle della “**geometria euclidea**”) in ogni punto dello spazio

- la definizione di un modo di **misurare il tempo** :

in Meccanica classica, è un **parametro assoluto** che ordina la successione degli eventi in un dato punto nella stessa maniera in ogni punto dello spazio ed in tutti i sistemi di coordinate (anche in moto relativo uno rispetto all’altro) : esso è misurato da “**orologi**” (sistemi fisici che esibiscono fenomeni periodici) il cui procedere è assunto essere lo stesso in tutti i punti dello spazio e indipendentemente dal loro stato di moto

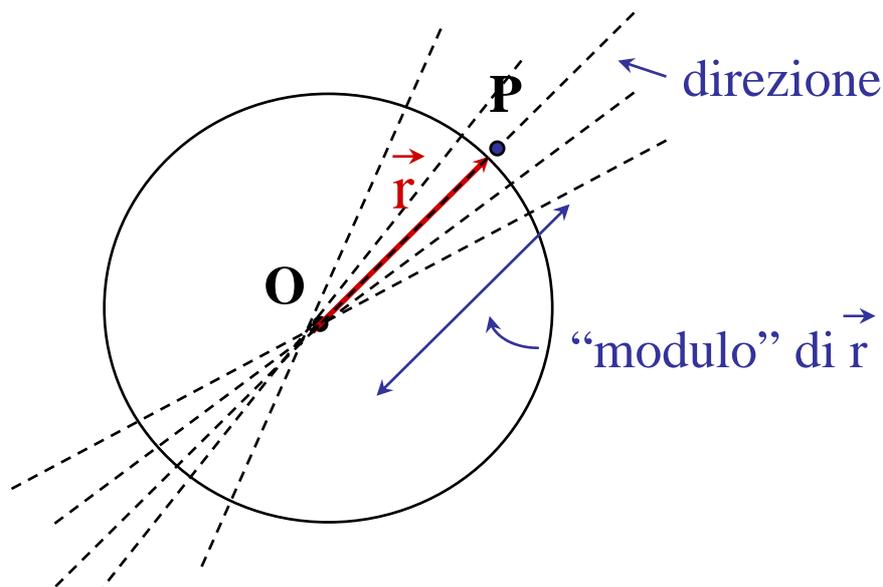
⇒ **assolutezza del concetto di “contemporaneità”** di eventi in punti diversi dello spazio

“Grandezza vettoriale”

è definita dandone un **modulo** (che ne specifica la grandezza in una data unità di misura), una **direzione** e un **verso**

“prototipo” di una grandezza vettoriale:

spostamento \vec{r} rispetto ad un punto dello spazio

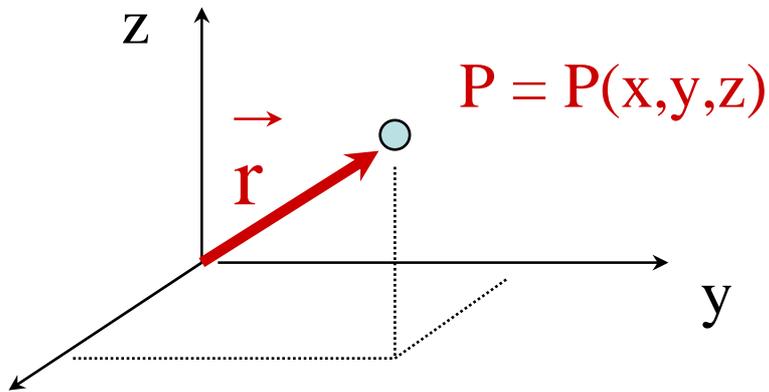


modulo, direzione e verso sono “**proprietà intrinseche**” della grandezza vettoriale (indipendenti dal sistema di coordinate scelto per rappresentarle)

- definito un sistema di coordinate, nello spazio tridimensionale una grandezza vettoriale è individuata da tre numeri, “**componenti**” del vettore che la rappresenta nel sistema dato
- le componenti di un vettore soddisfano determinate “**proprietà di trasformazione**” per cambiamenti del sistema di coordinate, in modo tale da rispettare la invarianza delle proprietà intrinseche del vettore

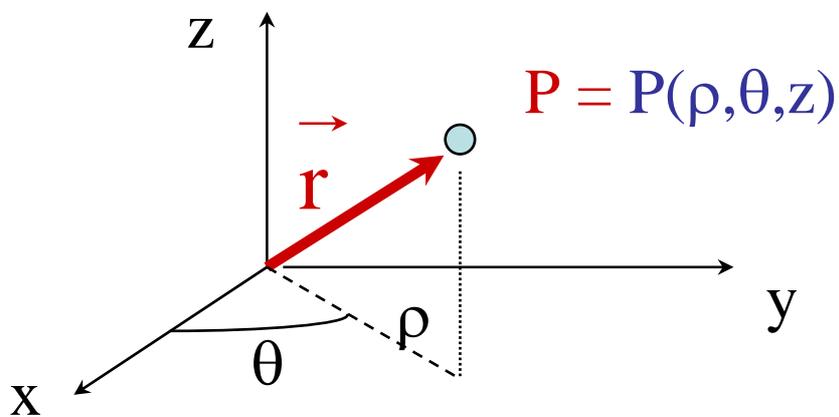
Sistemi di coordinate

Coordinate **cartesiane ortogonali**:

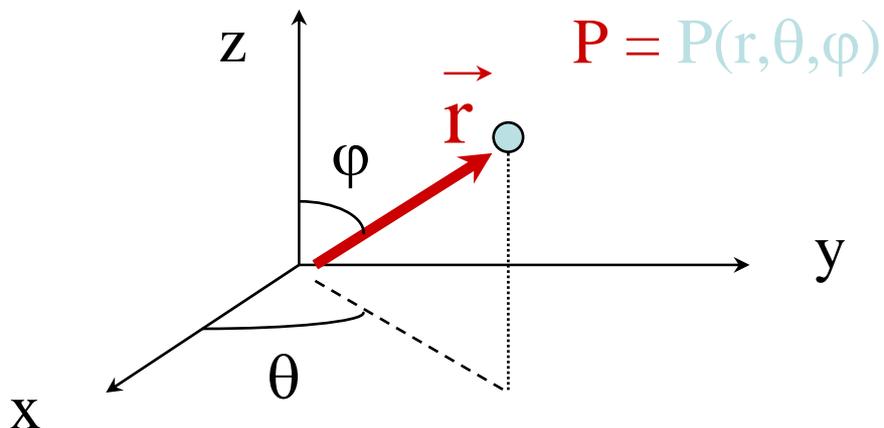


x

Coordinate **cilindriche**:

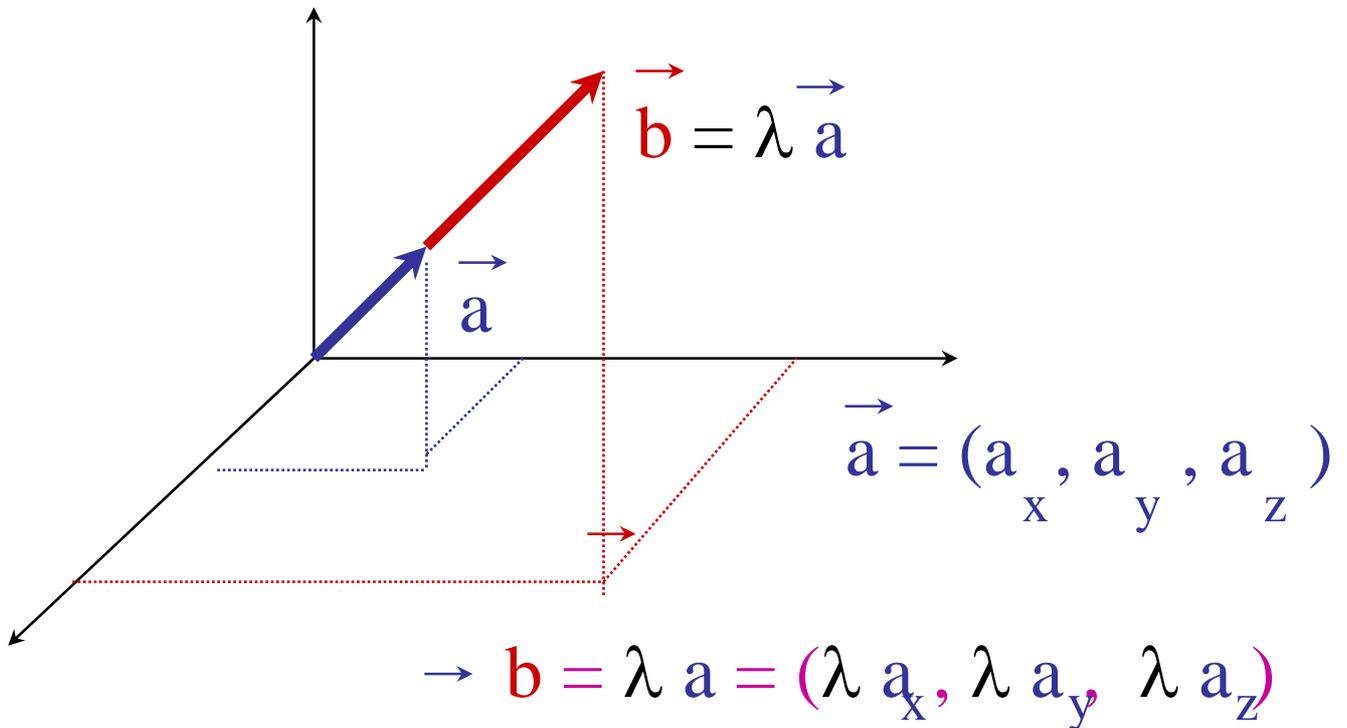


Coordinate **sferiche** :



Operazioni con i vettori

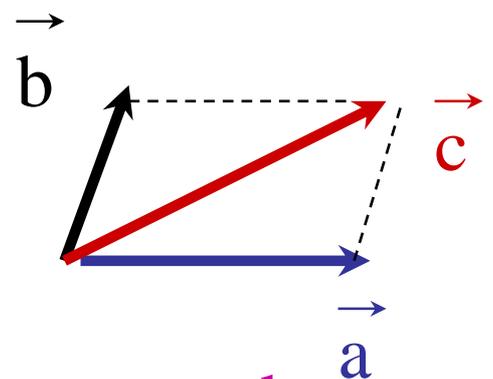
Prodotto per uno scalare



- **Somma di due vettori**

⇒ “regola del parallelogramma”

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$



$$c_x = a_x + b_x$$

$$c_y = a_y + b_y$$

$$c_z = a_z + b_z$$

Proprietà commutativa : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Versori

- **“Versore” \vec{u} :**

vettore di modulo unitario:

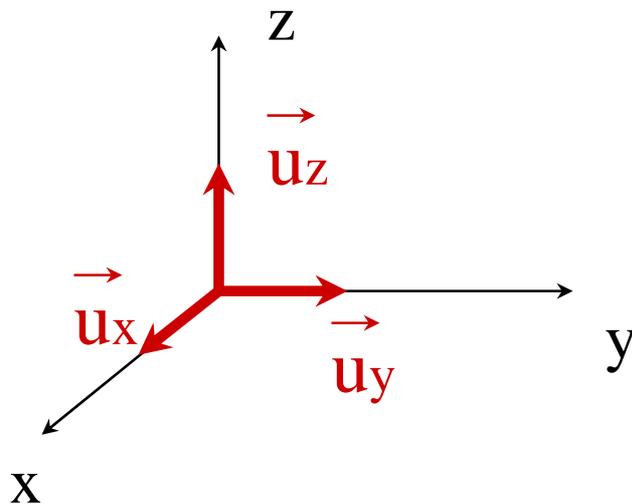
$$|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = 1$$

- **Versori degli assi coordinati :**

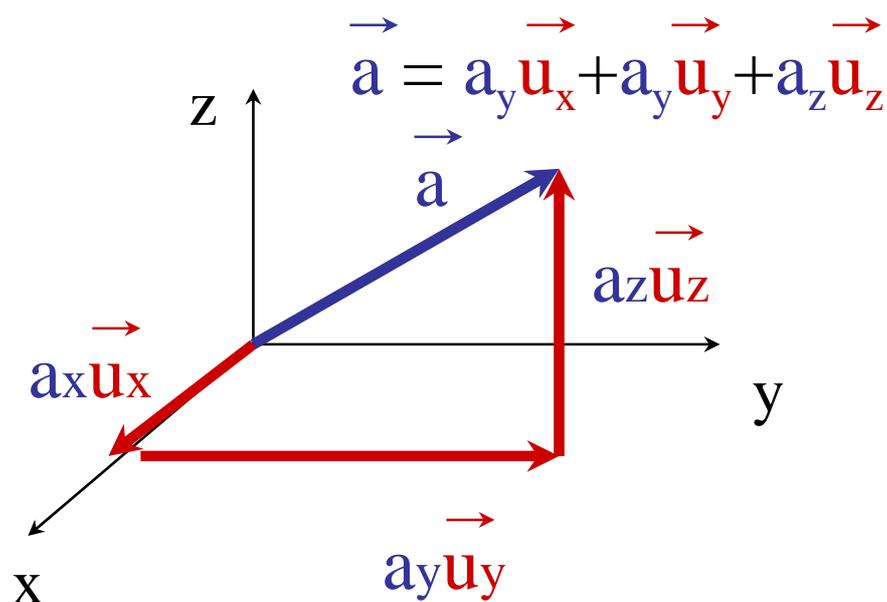
$$\vec{u}_x \equiv \mathbf{i} = (1,0,0)$$

$$\vec{u}_y \equiv \mathbf{j} = (0,1,0)$$

$$\vec{u}_z \equiv \mathbf{k} = (0,0,1)$$

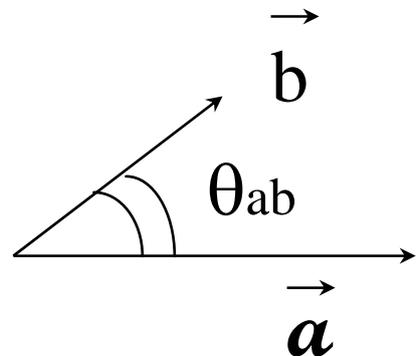


- **Espressione di un vettore in funzione dei versori degli assi coordinati :**



- Prodotto scalare** di due vettori :

$$s \equiv \vec{a} \cdot \vec{b} \equiv |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \vartheta_{ab}$$



$$\vec{a} \cdot \vec{a} \equiv \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

$$\Rightarrow \vec{u}_x^2 = \vec{u}_y^2 = \vec{u}_z^2 = 1$$

$$\vec{u}_x \cdot \vec{u}_y = \vec{u}_x \cdot \vec{u}_z = \vec{u}_y \cdot \vec{u}_z = 0$$

Proprietà distributiva:

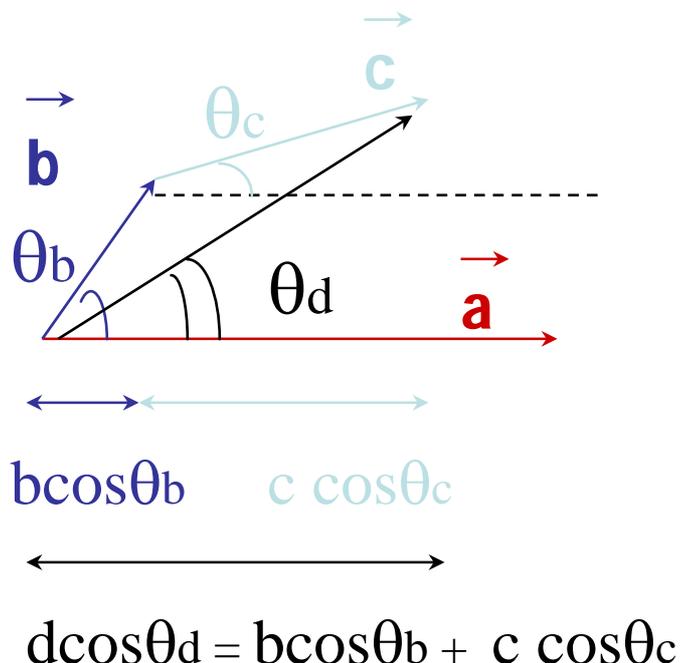
$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{d} \equiv$$

$$a \cdot d \cos \vartheta_d =$$

$$a \cdot (b \cos \vartheta_b + c \cos \vartheta_c) =$$

$$a \cdot b \cos \vartheta_b + a \cdot c \cos \vartheta_c \equiv$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$



Prodotto scalare in coordinate cartesiane

⇒ Espressione del prodotto scalare in funzione delle coordinate cartesiane :

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = (a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y + a_z \vec{u}_z) \bullet (b_x \vec{u}_x + b_y \vec{u}_y + b_z \vec{u}_z) =$$

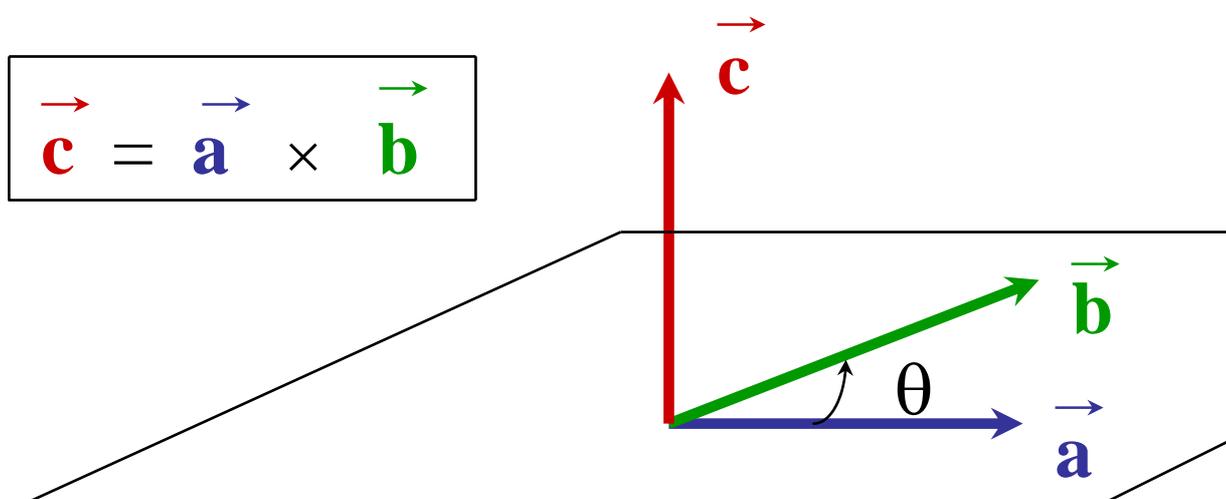
$$= a_x b_x \vec{u}_x \bullet \vec{u}_x + a_x b_y \vec{u}_x \bullet \vec{u}_y + \dots$$

\swarrow \searrow

$= 1$ $= 0$

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

- **Prodotto vettoriale** di due vettori :



Modulo: $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \theta$

Direzione: perpendicolare al piano
individuato da \vec{a} e \vec{b}

Verso: definito dalla “regola della mano destra”
(o “della vite destrogira”)

Proprietà anti-commutativa :

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

Proprietà distributiva:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

Prodotto vettoriale in coordinate cartesiane:

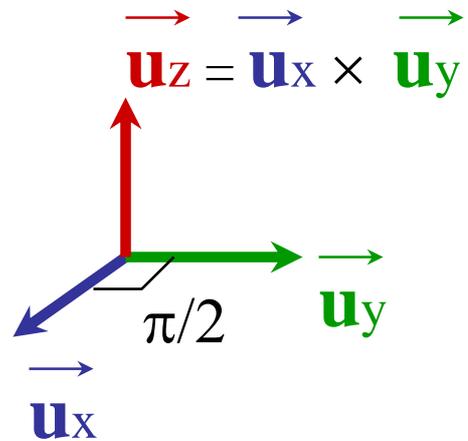
$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

$$\vec{u}_x \times \vec{u}_y = \vec{u}_z$$

⇒

$$\vec{u}_x \times \vec{u}_z = -\vec{u}_y$$

$$\vec{u}_y \times \vec{u}_z = \vec{u}_x$$



Espressione del prodotto vettoriale in funzione delle coordinate cartesiane :

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y + a_z \vec{u}_z) \times (b_x \vec{u}_x + b_y \vec{u}_y + b_z \vec{u}_z) = \\ &= (a_x \vec{u}_x \times b_x \vec{u}_x) + (a_x \vec{u}_x \times b_y \vec{u}_y) + \dots = \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{=0} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{= a_x b_y (\vec{u}_x \times \vec{u}_y)} = a_x b_y \vec{u}_z \end{aligned}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{u}_x - (a_x b_z - a_z b_x) \vec{u}_y + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{u}_z$$

In forma “matriciale”:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$