

Programma del corso di Analisi Matematica 3

G. Orlandi

a.a. 2009-10

1. Analisi complessa

Richiami sui numeri complessi. Funzioni elementari da \mathbb{C} in \mathbb{C} . Serie di potenze complesse. Inverse delle funzioni elementari: superfici di Riemann. La sfera di Riemann. Derivazione complessa, funzioni olomorfe. Equazioni di Cauchy-Riemann. Applicazioni conformi, funzioni armoniche. Funzioni intere.

Cammini. Curve di Jordan. Integrazione lungo cammini di una funzione $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Interpretazione relativamente al campo vettoriale $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Teorema di Cauchy-Goursat nel caso C^1 (f olomorfa $\Rightarrow f(z)dz$ è una forma chiusa). Formula integrale di Cauchy. Teorema della media. Analiticità delle funzioni olomorfe. Teorema di Liouville, Teorema Fondamentale dell'Algebra.

Zeri di una funzione olomorfa. Ordine di uno zero. Principio di continuazione analitica. Classificazione delle singolarità isolate: singolarità eliminabili, poli, singolarità essenziali. Teorema di Casorati-Weierstrass. Sviluppo in serie di Laurent. Residui.

Il Teorema dei residui. Residuo all'infinito. Teorema globale dei residui. Calcolo dei residui. Applicazioni al calcolo di integrali su \mathbb{R} , \mathbb{R}^+ , $[0, 2\pi]$. Lemma di Jordan.

Indice di allacciamento. Versione generale della formula integrale di Cauchy e del teorema dei residui.

Principio dell'argomento. Teorema di Rouché. Teorema di Hurwitz. Teorema Fondamentale dell'Algebra.

Teorema del massimo modulo. Teorema dell'applicazione aperta.

Mappe conformi. Proprietà: conservazione degli angoli, conservazione delle frontiere. Il Teorema di Riemann di classificazione conforme degli aperti semplicemente connessi di \mathbb{C} . Trasformazioni di Möbius: proprietà, esempi. Trasformazione di Joukowski.

2. Equazioni della Fisica Matematica: l'equazione di Laplace

Equazione di Laplace. Invarianza conforme. Equazione di Poisson. Problema di Dirichlet. Problema di Neumann. Esistenza, unicità e stabilità della soluzione del Pb di Dirichlet e del Pb di Neumann in domini di \mathbb{R}^2 . Proprietà della media e principio del massimo per funzioni armoniche. Formule di Green. Massa (o delta) di Dirac. Soluzione fondamentale del Laplaciano. Funzioni di Green per il pb di Dirichlet e di Neumann. Nucleo di Poisson per il cerchio, per il semipiano, e per la palla in \mathbb{R}^3 .

Metodo delle cariche immagini. Funzione di Green per domini conformemente equivalenti al cerchio. Metodo di separazione di variabili per la risoluzione di problemi di Dirichlet (o di Neumann) in un rettangolo e in un cerchio. Problema di Dirichlet in domini esterni. Fluidi piani incompressibili irrotazionali. Descrizione mediante il potenziale complesso. Determinazione del potenziale complesso nel dominio esterno ad un cerchio con velocità assegnata (e circolazione assegnata) all'infinito. Punti di stagnazione.

3. Trasformata di Laplace

Segnali causali. Funzione di Heaviside. Funzioni \mathcal{L} -trasformabili. Trasformata di Laplace. Ascissa di convergenza. Olomorfia della trasformata di Laplace nel semipiano di convergenza (via Teorema di derivazione sotto il segno di integrale). Trasformata della funzione di Heaviside. Relazione tra trasformata di Laplace e trasformata di Fourier. Formula di inversione di Riemann-Fourier. Proprietà della trasformata di Laplace rispetto ad alcune operazioni: ritardo, modulazione, convoluzione, integrazione e derivazione. Trasformata della delta di Dirac δ_0 . Teoremi del valore iniziale e finale. Trasformata di segnali periodici. Applicazione alla risoluzione di problemi differenziali ai valori iniziali. Uso del teorema dei residui per l'inversione della trasformata di Laplace. Nozione di derivata distribuzionale (derivata della funzione di Heaviside, derivata della delta di Dirac). Trasformata delle derivate distribuzionali e applicazioni. Pettine di Dirac. Calcolo di integrali definiti mediante trasformata di Laplace. Applicazione alla risoluzione di equazioni integrali e integro-differenziali con nucleo di convoluzione (filtro tempo-invariante). Trasformata della funzione di Bessel J_0 .

Segnali causali a tempo discreto. Trasformata Zeta. Relazione con la trasformata di Laplace. Proprietà rispetto ad alcune operazioni (ritardo, convoluzione). Formula di inversione, relazione con la formula per i coefficienti di Fourier. Applicazione alla risoluzione di equazioni alle differenze.

Bibliografia.

- De Marco, *Analisi Matematica 2*.
Henrici, *Applied and computational Complex Analysis*, Wiley (1974).
Rudin, *Real and Complex Analysis*, Mc Graw-Hill (1970).
Spiegel, *Laplace Transforms*, collana Schaum, Mc Graw-Hill (1994).
Weinberger, *A first course in Partial Differential Equations*, Dover (1995).