TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE

a.a. 2011/12 (Prof. M. Spera)

Prova scritta del 18 giugno 2012

(1) Siano dati, in $\mathbb{R}^2$, $T = \frac{\partial}{\partial x} \otimes \frac{\partial}{\partial y} \otimes dx$

$X = y \frac{\partial}{\partial x}$. Calcolare $\mathcal{L}_X T$

(2) In $\mathbb{R}^3$, determinare le $\alpha = \alpha(x,y,z)$, lisce, tali che $\omega = \alpha\, dx + dy + dz$ risulti integrabile

(3) Dopo essersi accertati dell'integrabilità di

$$\omega = (y+z)\, dx + dy + dz,$$

trovarne una base della distribuzione da questa individuata.

(4) Data una varietà riemanniana (M, g) $(\dim M = n)$ e $\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$, dimostrare che le equazioni di Eulero-Lagrange associate a $\mathcal{L}$ sono le eq. che individuano le geodetiche.

(5) Sia $U \subset \mathbb{R}^2$ aperto, connesso, sempl. connesso, e $V \in \mathcal{X}(U)$, $V = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$, f liscia avente curve di livello semplici e chiuse. Dimostrare che V possiede un pto critico

Tempo a disposizione 1h.15m

Le risposte vanno adeguatamente giustificate

Topogeo

18 giugno 2012

(1) $$X = y\frac{\partial}{\partial x}$$

$$T = \frac{\partial}{\partial x}\otimes\frac{\partial}{\partial y}\otimes dx$$

$$\mathcal{L}_X T = \overset{①}{\mathcal{L}_X\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)}\otimes\frac{\partial}{\partial y}\otimes dx + \frac{\partial}{\partial x}\otimes\overset{②}{\mathcal{L}_X\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)}\otimes dx + \frac{\partial}{\partial x}\otimes\frac{\partial}{\partial y}\otimes\overset{③}{\mathcal{L}_X(dx)}$$

① $$\mathcal{L}_X\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left[y\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right] = 0$$

controllo: $$y\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \cancel{y\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}} - \underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}_{=0}\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

② $$\mathcal{L}_X\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = \left[y\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right] = -\frac{\partial}{\partial x}$$

controllo: $$y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -\underbrace{\frac{\partial y}{\partial y}}_{1}\frac{\partial f}{\partial x}\left(-y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right) = -\frac{\partial f}{\partial x}$$

③ $$\mathcal{L}_X dx \overset{(\text{cartan})}{=} d\,\mathcal{L}_X x = d\left[X(x)\right] = d\left(y\underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{1}\right) = dy$$

$$\boxed{\mathcal{L}_X T = -\frac{\partial}{\partial x}\otimes\frac{\partial}{\partial x}\otimes dx + \frac{\partial}{\partial x}\otimes\frac{\partial}{\partial y}\otimes dy}$$

Topogeo
18 giugno 2012

(2) $\omega = \alpha\, dx + dy + dz$

trovare $\alpha = \alpha(x,y,z)$ $\alpha \in C^\infty$

in modo che la distribuzione individuata da ω sia integrabile

$\omega = \alpha\, dx + dy + dz$

$$d\omega = d\alpha \wedge dx = \frac{\partial\alpha}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial\alpha}{\partial z} dz \wedge dx$$

$$\omega \wedge d\omega = \frac{\partial\alpha}{\partial y} dz \wedge dy \wedge dx + \frac{\partial\alpha}{\partial z} dy \wedge dz \wedge dx$$

$$= \left(\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right) dx \wedge dy \wedge dz \qquad = 0$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\alpha}{\partial y} = 0$$

(3) Dopo essersi accertati dell'integrabilità di

$$\omega = (y+z)\,dx + dy + dz \qquad (y+z \neq 0)$$

trovarne una base del nucleo pto per pto

Sol. La prima parte segue da (1): $\frac{\partial(y+z)}{\partial z} = 1 = \frac{\partial(y+z)}{\partial y}$

Sia $X = \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} + \gamma \frac{\partial}{\partial z}$

$$\omega(X) = \alpha(y+z) + \beta + \gamma = 0$$

Scegliamo $X_1 = \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}$ $\alpha = 0$ $\beta + \gamma = 0$

$\beta = 1$

$\gamma = -1$

X_2 : poniamo $\gamma = 0$

$$\alpha(y+z) + \beta = 0$$

$\alpha = 1$ $\quad \beta = -(y+z)$

base : $X_1 = \dfrac{\partial}{\partial y} - \dfrac{\partial}{\partial z}$ $\qquad X_2 = \dfrac{\partial}{\partial x} - (y+z)\dfrac{\partial}{\partial y}$

(4) Su una varietà riemanniana, data

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{ij}\dot{x}^i \dot{x}^j$$

Dimostrare che le equazioni di Eulero-Lagrange associate a $\mathcal{L}$ sono le eq. che individuano le geodetiche:

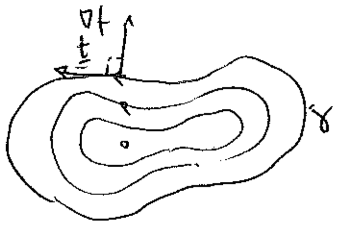
$$\ddot{x}^k + \Gamma^k_{ij}\dot{x}^i \dot{x}^j = 0$$

standard... vedi dispense del corso

(5) Sia $V \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$, $V = \nabla f$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$, con $\mathcal{U}$ aperto, connesso, semplicemente connesso

f avente : curve di livello semplici e chiuse.

Dimostrare che V possiede un pto critico



Sol : Data una curva di livello, è $\underline{t} \perp \nabla f$. Come conseguenza del teorema di Hopf si ha $\mathrm{ind}_\gamma V = +1$

$\Rightarrow$ V possiede almeno un pto critico all'interno di γ.