

## Foglio 3

**Da consegnare Giovedì 25 ottobre all'inizio della lezione.**

**Esercizio 1** (Punti 6). Al variare di  $\alpha \in \mathbb{C}$  discutere l'invertibilità della matrice

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -2\alpha & -3 \\ 0 & \alpha & -1 \\ 1 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

Per tali  $\alpha$  determinare l'inversa di  $A_\alpha$ .

**Esercizio 2** (Punti 8). Determinare le inverse destre della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e le inverse sinistre della matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

**Esercizio 3** (Punti 10). 1. Dire se l'insieme  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ , in cui

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

è un insieme di generatori di  $\mathbb{R}^3$ , come  $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale.

2. Estrarre da essi una base di  $\mathbb{R}^3$ .

3. Considerare la matrice  $B$  che ha per colonne i vettori della base di cui al punto precedente.  $B$  è invertibile? (Giustificare la risposta). In caso affermativo determinare l'inversa.

**Esercizio 4** (Punti 6). ☛ Si consideri l'insieme  $V := \mathbb{R}_{\geq} \setminus \{0\}$  dotato dell'operazione tra vettori

$$\begin{aligned} \star: V \times V &\longrightarrow V \\ (v, w) &\longmapsto v \cdot w \end{aligned}$$

in cui  $\cdot$  denota l'usuale prodotto di  $\mathbb{R}$ ; e dell'operazione tra scalari e vettori

$$\begin{aligned} \diamond: \mathbb{R} \times V &\longrightarrow V \\ (\alpha, v) &\longmapsto v^\alpha \end{aligned}$$

Dimostrare che  $V$  dotato delle operazioni  $\star$  e  $\diamond$  ha la struttura di  $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale. Ha dimensione finita?

**N.B.**

Il simbolo ☛ denota esercizi giudicati **difficile**.