

LABORATORIO

Abbiamo visto come lavorare con le immagini definite tramite i tre colori fondamentali Red Green Blue.

```
>> a = zeros(2,5,3)
```

```
a(:,:,1) =
```

```
0 0 0 0 0  
0 0 0 0 0
```

```
a(:,:,2) =
```

```
0 0 0 0 0  
0 0 0 0 0
```

```
a(:,:,3) =
```

```
0 0 0 0 0  
0 0 0 0 0
```

```
>> a(1,1,1)=1; % colore di rosso il pixel (1,1)  
>> a(1,2,2)=1; % colore di verde il pixel (1,2)  
>> a(1,3,3)=1; % colore di blu il pixel (1,3)  
>> a(2,1,:)=1; % colore di bianco il pixel (2,1)  
>> image(a)  
>> a
```

```
a(:,:,1) =
```

```
1 0 0 0 0  
1 0 0 0 0
```

```
a(:,:,2) =
```

```
0 1 0 0 0  
1 0 0 0 0
```

```
a(:,:,3) =
```

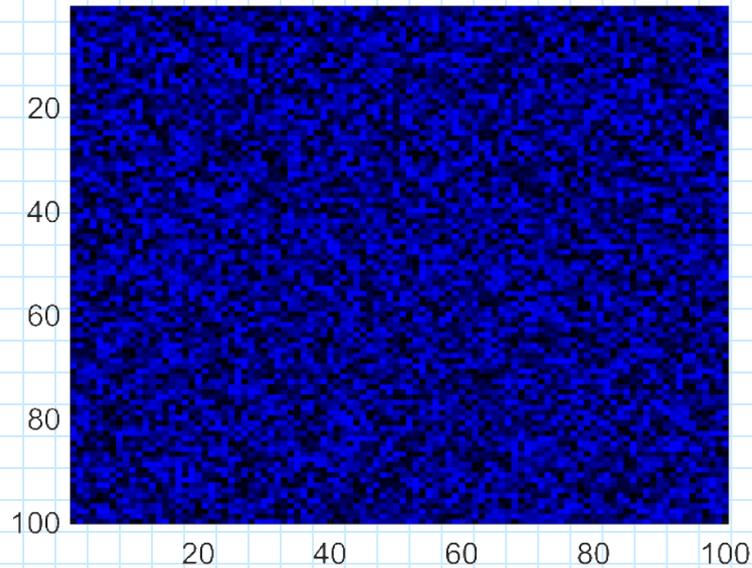
```
0 0 1 0 0  
1 0 0 0 0
```

```
>>
```



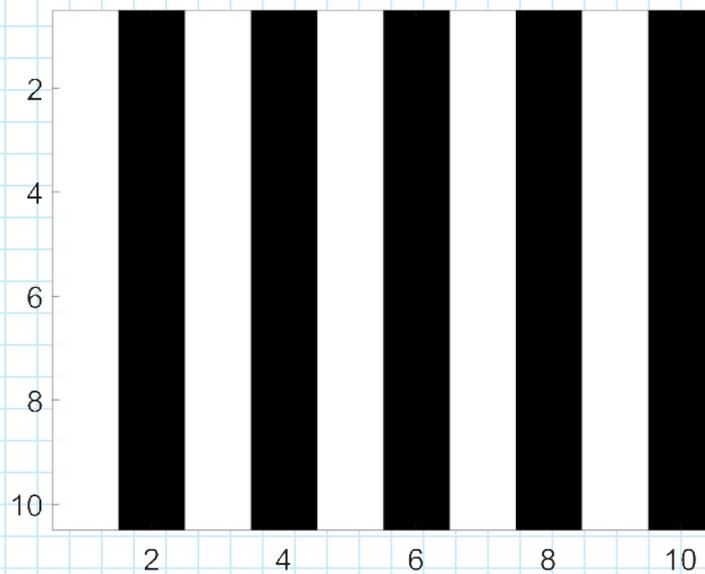
Creazione di una immagine 100x100 pixel con colori random nel blu

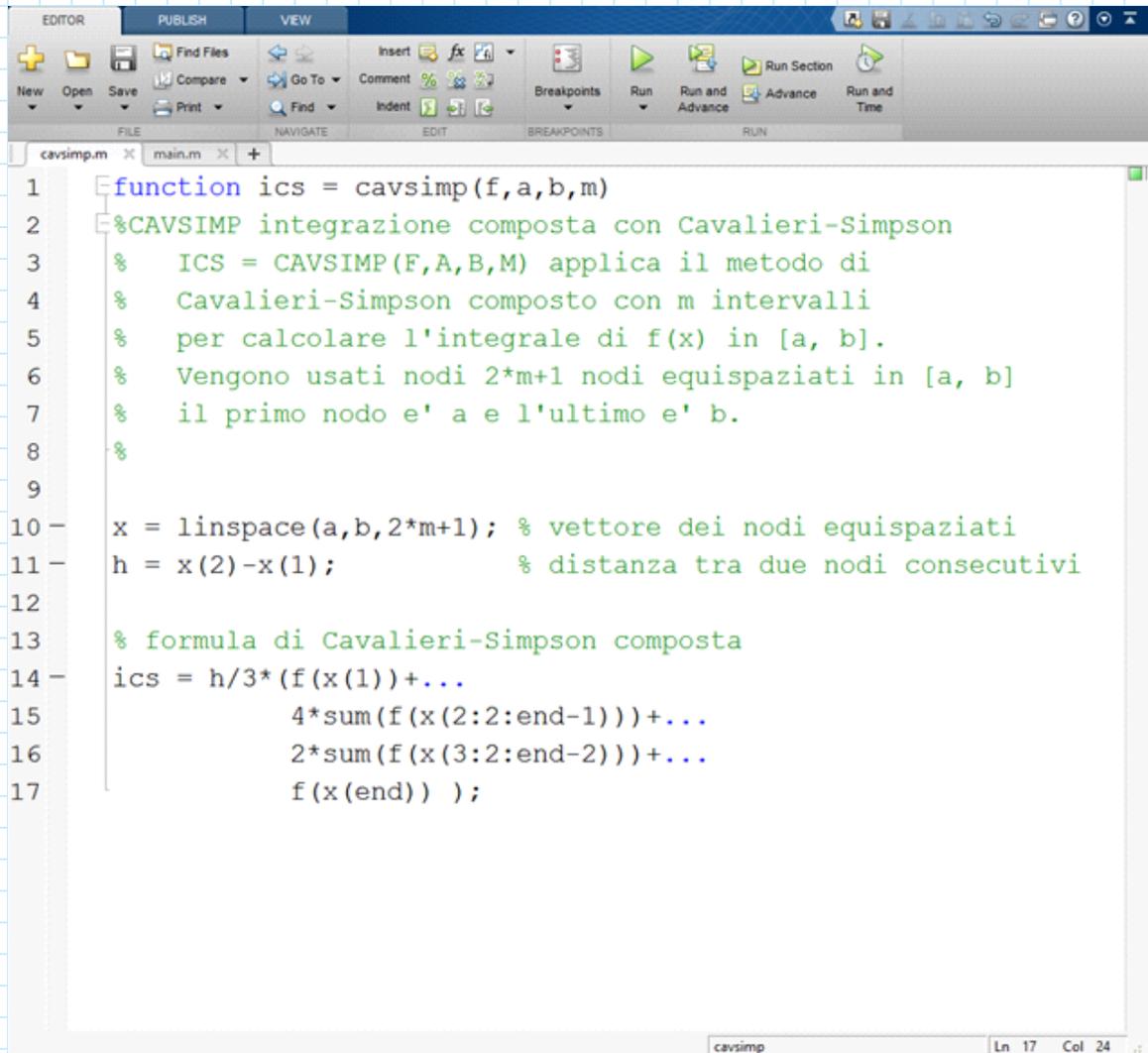
```
>> a = zeros(100,100,3);  
>> a(:,:,3)=rand(100);  
>> image(a)  
>>
```



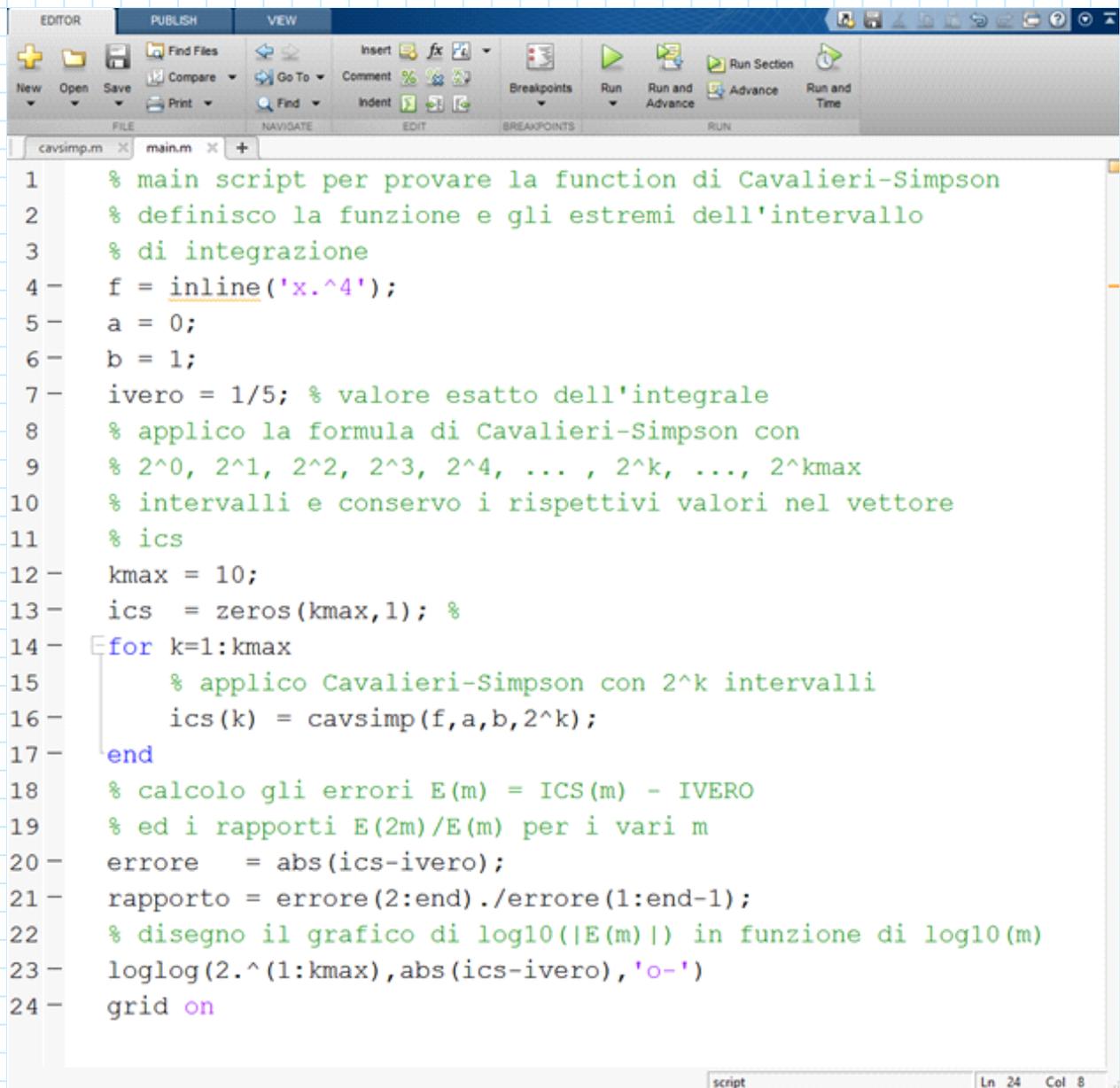
Creazione di una immagine a strisce bianche e nere alternate

```
>> a = zeros(10,10,3);  
>> a(:,1:2:end,:) = 1; % creo le barre verticali bianche  
>> image(a)  
>>
```



Formula di integrazione di Cavalieri-Simpson composto

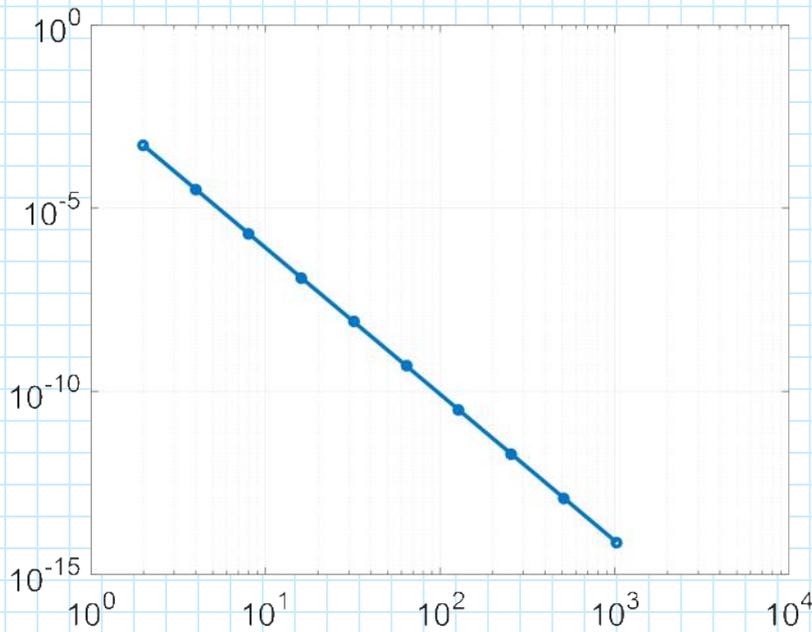
```
1 function ics = cavsimp(f,a,b,m)
2 %CAVSIMP integrazione composta con Cavalieri-Simpson
3 % ICS = CAVSIMP(F,A,B,M) applica il metodo di
4 % Cavalieri-Simpson composto con m intervalli
5 % per calcolare l'integrale di f(x) in [a, b].
6 % Vengono usati 2*m+1 nodi equispaziati in [a, b]
7 % il primo nodo e' a e l'ultimo e' b.
8 %
9
10 x = linspace(a,b,2*m+1); % vettore dei nodi equispaziati
11 h = x(2)-x(1);           % distanza tra due nodi consecutivi
12
13 % formula di Cavalieri-Simpson composta
14 ics = h/3*(f(x(1))+...
15           4*sum(f(x(2:2:end-1)))+...
16           2*sum(f(x(3:2:end-2)))+...
17           f(x(end)) );
```



```
1 % main script per provare la function di Cavalieri-Simpson
2 % definisco la funzione e gli estremi dell'intervallo
3 % di integrazione
4 - f = inline('x.^4');
5 - a = 0;
6 - b = 1;
7 - ivero = 1/5; % valore esatto dell'integrale
8 % applico la formula di Cavalieri-Simpson con
9 % 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, ..., 2^k, ..., 2^kmax
10 % intervalli e conservo i rispettivi valori nel vettore
11 % ics
12 - kmax = 10;
13 - ics = zeros(kmax,1); %
14 - for k=1:kmax
15     % applico Cavalieri-Simpson con 2^k intervalli
16     ics(k) = cavsimp(f,a,b,2^k);
17 - end
18 % calcolo gli errori E(m) = ICS(m) - IVERO
19 % ed i rapporti E(2m)/E(m) per i vari m
20 - errore = abs(ics-ivero);
21 - rapporto = errore(2:end)./errore(1:end-1);
22 % disegno il grafico di log10(|E(m)|) in funzione di log10(m)
23 - loglog(2.^(1:kmax),abs(ics-ivero),'o-')
24 - grid on
```

script Ln 24 Col 8

Risultati per $f(x) = x^4$ con $[a, b] = [0, 1]$



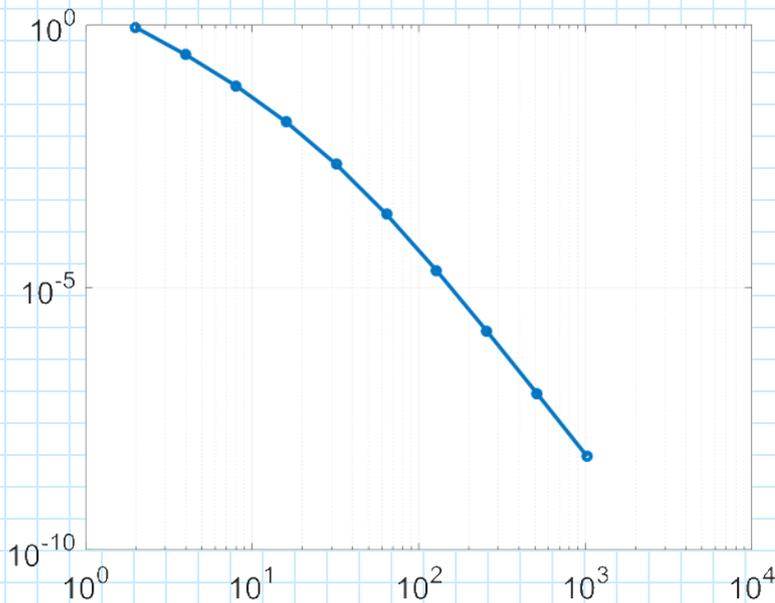
>> rapporto

rapporto =

- 0.0625
- 0.0625
- 0.0625
- 0.0625
- 0.0625
- 0.0625
- 0.0625
- 0.0625
- 0.0623

Dato che la derivata quarta di f è uguale a 24, valore costante, il rapporto $E(2m)/E(m)$ è costante ed uguale ad $1/16=0.0625$. Inoltre, sempre per lo stesso motivo, l'andamento di $\log_{10}(|E(m)|)$ è lineare con $\log_{10}(m)$.

Risultati per $f(x) = \ln(x)$ con $[a, b] = [0.1, 10]$



>> rapporto

rapporto =

- 0.3011
- 0.2561
- 0.2053
- 0.1546
- 0.1125
- 0.0846
- 0.0703
- 0.0648
- 0.0631

Dato che la derivata quarta non è costante nell'intervallo di integrazione, né i rapporti tra due errori consecutivi è pari a $1/16$ né il grafico mostra una retta.

(B) Possiamo legare $\|e^{(k)}\|$ alla norma di $\|e^{(0)}\|$.

Da (A) abbiamo

$$\frac{\|e^{(k)}\|}{\|e^{(k-1)}\|} \approx \rho(E) \Rightarrow \|e^{(k)}\| \approx \rho(E) \cdot \|e^{(k-1)}\|$$

Supponiamo che vale MN solo per k grandi, ma $\forall k \in \mathbb{N}$; allora

$$\begin{aligned} \|e^{(k)}\| &\approx \rho(E) \cdot \|e^{(k-1)}\| \approx \rho(E) \cdot [\rho(E) \cdot \|e^{(k-2)}\|] \\ &= [\rho(E)]^2 \cdot \|e^{(k-2)}\| \approx \dots \\ &\approx [\rho(E)]^k \cdot \|e^{(0)}\| \end{aligned}$$

In conclusione ho

$$\|e^{(k)}\| \approx [\rho(E)]^k \cdot \|e^{(0)}\|$$

Da quest'ultima ottengo due informazioni interessanti:

(B1) Posso stimare il valore di k necessario per avere

$$\frac{\|e^{(k)}\|}{\|e^{(0)}\|} < \epsilon \quad \text{con } \epsilon \text{ assegnato}$$

In effetti basta imporre

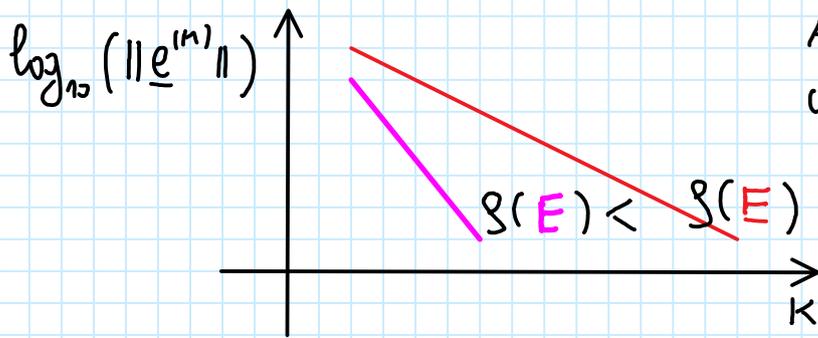
$$[\rho(E)]^k < \epsilon \Rightarrow k > \frac{\log_{10}(\epsilon)}{\log_{10}(\rho(E))}$$

(B2) Posso avere l'andamento di $\log_{10}(\|e^{(k)}\|)$ in funzione di k :

$$\|e^{(k)}\| \approx [\rho(E)]^k \cdot \|e^{(0)}\| \Rightarrow$$

$$\log_{10}(\|e^{(k)}\|) \approx \boxed{k} \log_{10}(\rho(E)) + \log_{10}(\|e^{(0)}\|)$$

$y \quad \approx x \quad m \quad + \quad q$



Almeno per k grandi ρ_0
 un avvolgimento LINEARE
 con pendenza $\log_{10}(g(E))$.

ESEMPIO

Sia

$$\underline{x}^{(n+1)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}}_E \underline{x}^{(n)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/2 \end{pmatrix}}_q, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

(a) Dire se il metodo converge per ogni $\underline{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ ed in caso affermativo a quale \underline{x} converge.

(b) Stimare il numero di iterazioni $\sqrt[k]{}$ necessarie per avere

$$\frac{\|\underline{e}^{(k)}\|}{\|\underline{e}^{(0)}\|} < 10^{-6}.$$

Calcolo $g(E) = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|)$:

$$\begin{aligned} P_E(\lambda) &= \det(E - \lambda I_2) = |E - \lambda I_2| = \left| \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} - \lambda \end{pmatrix} \right| = \\ &= \left(\frac{1}{2} - \lambda \right)^2 - \left(\frac{1}{3} \right)^2 = \left(\frac{1}{2} - \lambda - \frac{1}{3} \right) \left(\frac{1}{2} - \lambda + \frac{1}{3} \right) = \\ &= \left(-\lambda + \frac{1}{6} \right) \left(-\lambda + \frac{5}{6} \right) \end{aligned}$$

Però E ha autovalori $\lambda_1 = \frac{1}{6}$ e $\lambda_2 = \frac{5}{6}$ per cui è

$g(E) = \max\left(\left|\frac{1}{6}\right|, \left|\frac{5}{6}\right|\right) = \frac{5}{6}$. Dato che $g(E) < 1$, il metodo è convergente. Il metodo converge a $\underline{x} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ che soddisfa

$$\underline{x} = E \underline{x} + q \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{3}x_2 = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{1}{6}x_1 - \frac{1}{9}x_2 = \frac{1}{9} & 1^2 - 2^2 \\ \frac{1}{6}x_1 - \frac{1}{4}x_2 = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \left(-\frac{1}{9} + \frac{1}{4}\right)x_2 = \frac{1}{9} - \frac{1}{4}$$

$$x_2 = -1$$

Poi è

$$\frac{1}{2}x_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

Dunque l'iterazione $\underline{x}^{(n+1)} = E \underline{x}^{(n)} + \underline{q}$ converge a

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ per ogni scelta } \underline{x}^{(0)}$$

(b) Stimmo il numero di iterazioni per avere

$$\frac{\|e^{(n)}\|}{\|e^{(0)}\|} < 10^{-6}$$

Usando il fatto che posso scrivere

$$\frac{\|e^{(n)}\|}{\|e^{(0)}\|} \approx [\rho(E)]^n$$

per cui imponiamo

$$[\rho(E)]^n < 10^{-6} \Leftrightarrow n > \frac{\log_{10}(10^{-6})}{\log_{10}\left(\frac{5}{6}\right)} \approx 75,8$$

$\frac{5}{6} \Rightarrow \log_{10}(\rho(E)) < 0$

Allora servono circa 80 iterazioni.

METODI ITERATIVI CLASSICI

Scrivo

$$A = \begin{pmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{pmatrix} = L + D + U$$

Se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ h.o. } L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

JACOBI

$$A \underline{x} = \underline{b}$$

$$(L+D+U) \underline{x} = \underline{b}$$

$$D \underline{x} = -(L+U) \underline{x} + \underline{b}$$

$$\underline{x} = -D^{-1}(L+U) \underline{x} + D^{-1} \underline{b}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \underline{x}^{(0)} \text{ dato} \\ \underline{x}^{(n+1)} = \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_{E_J} \underline{x}^{(n)} + \underbrace{D^{-1} \underline{b}}_{\underline{q}_J} \end{cases}$$

GAUSS-SEIDEL

$$A \underline{x} = \underline{b}$$

$$(L+D+U) \underline{x} = \underline{b}$$

$$(L+D) \underline{x} = -U \underline{x} + \underline{b}$$

$$\underline{x} = -(L+D)^{-1} U \underline{x} + (L+D)^{-1} \underline{b}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \underline{x}^{(0)} \text{ dato} \\ \underline{x}^{(n+1)} = \underbrace{-(L+D)^{-1} U}_{E_S} \underline{x}^{(n)} + \underbrace{(L+D)^{-1} \underline{b}}_{\underline{q}_S} \end{cases}$$

Il metodo di Jacobi converge se e solo se $\rho(E_J) < 1$;
idem per Gauss-Seidel: converge se e solo se $\rho(E_S) < 1$.

Due metodi possono essere riscritti esplicitando le nuove equazioni. Vediamo come scriverle nel caso $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.
Vedo Jacobi:

$$\begin{cases} \underline{x}^{(0)} \text{ dato} \\ \underline{x}^{(h+1)} = \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_{E_J} \underline{x}^{(h)} + \underbrace{D^{-1}\underline{b}}_{\underline{q}_J} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_J = -D^{-1}(L+U) = - \begin{pmatrix} 1/a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} \\ -\frac{a_{31}}{a_{33}} & -\frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{q}_J = D^{-1}\underline{b} = \begin{pmatrix} 1/a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ b_3/a_{33} \end{pmatrix}$$

A close to

$$\begin{pmatrix} x_1^{(h+1)} \\ x_2^{(h+1)} \\ x_3^{(h+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} \\ -\frac{a_{31}}{a_{33}} & -\frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(h)} \\ x_2^{(h)} \\ x_3^{(h)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \frac{b_3}{a_{33}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(h)} - a_{13}x_3^{(h)}}{a_{11}} \\ \frac{b_2 - a_{21}x_1^{(h)} - a_{23}x_3^{(h)}}{a_{22}} \\ \frac{b_3 - a_{31}x_1^{(h)} - a_{32}x_2^{(h)}}{a_{33}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1^{(n+1)} = \frac{b_1 - q_{12} x_2^{(n)} - q_{13} x_3^{(n)}}{q_{11}} \\ x_2^{(n+1)} = \frac{b_2 - q_{21} x_1^{(n)} - q_{23} x_3^{(n)}}{q_{22}} \\ x_3^{(n+1)} = \frac{b_3 - q_{31} x_1^{(n)} - q_{32} x_2^{(n)}}{q_{33}} \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Sono facili da ottenere e partire dalle equazioni di $Ax = \underline{b}$:

$$\begin{cases} q_{11} x_1 + q_{12} x_2 + q_{13} x_3 = b_1 \\ q_{21} x_1 + q_{22} x_2 + q_{23} x_3 = b_2 \\ q_{31} x_1 + q_{32} x_2 + q_{33} x_3 = b_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{b_1 - q_{12} x_2 - q_{13} x_3}{q_{11}} \\ x_2 = \frac{b_2 - q_{21} x_1 - q_{23} x_3}{q_{22}} \\ x_3 = \frac{b_3 - q_{31} x_1 - q_{32} x_2}{q_{33}} \end{cases}$$

In modo analogo si ottengono le equazioni di aggiornamento di Gauss-Seidel:

$$\begin{cases} x_1^{(n+1)} = \frac{b_1 - q_{12} x_2^{(n)} - q_{13} x_3^{(n)}}{q_{11}} \\ x_2^{(n+1)} = \frac{b_2 - q_{21} x_1^{(k+1)} - q_{23} x_3^{(n)}}{q_{22}} \\ x_3^{(n+1)} = \frac{b_3 - q_{31} x_1^{(k+1)} - q_{32} x_2^{(k+1)}}{q_{33}} \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Per ottenere come parte da

$$(D+L) \underline{x}^{(n+1)} = -U \underline{x}^{(n)} + \underline{b}$$

e risolvendo rispetto a $\underline{x}^{(n+1)}$:

$$\begin{pmatrix} q_{11} & 0 & 0 \\ q_{21} & q_{22} & 0 \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(n+1)} \\ x_2^{(n+1)} \\ x_3^{(n+1)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & q_{12} & q_{13} \\ 0 & 0 & q_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ x_3^{(n)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

CONDIZIONI SUFFICIENTI ALLA CONVERGENZA

Non sempre è facile calcolare E_f , E_s e $\rho(E_f)$ e $\rho(E_s)$.
Si danno perciò delle condizioni sufficienti alla convergenza.

DEF. La matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si dice

- (o) diagonale dominante in senso stretto per **righe** se

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^m |a_{in}| < |a_{ii}|, \quad i = 1, \dots, m$$

somma elementi
riga i -esima
escluso a_{ii}

- (o) diagonale dominante in senso stretto per **COLONNE** se

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m |a_{ik}| < |a_{kk}|, \quad k = 1, \dots, m$$

somma elementi
colonna k -esima
escluso a_{kk}

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ -4 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

è diag. dom. in senso stretto per righe perché

$$|-5| > |1| + |-2| \quad 1^{\text{a}} \text{ riga}$$

$$|5| > |-4| + |0| \quad 2^{\text{a}} \text{ "}$$

$$|-3| > |2| + |0| \quad 3^{\text{a}} \text{ "}$$

ma NON per colonne perché $|-5| < |-4| + |2|$ (1^{a} colonna).

PROP. Consideriamo $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Se A è diag. dominante in senso stretto per righe σ per colonne, allora i metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel convergono alle soluzioni di $Ax = b$ per ogni scelta di $\underline{x}^{(0)}$.

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

he Jacobi e Gauss-Seidel convergono!
perché A è diag. dom. in senso stretto.