

METODO DI NEWTON

(1) Interpretazione geometrica aiuta a capire il comportamento della successione x_n data da

$$\begin{cases} x_0 \text{ dato} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

(2) Studiamo le caratteristiche di x_n

(2.1) ordine di convergenza e la costante dell'errore

(2.2) test di arresto

(3) Metodi "quasi-Newton"

(3.1) secondi variabili

(3.2) tangente fissa

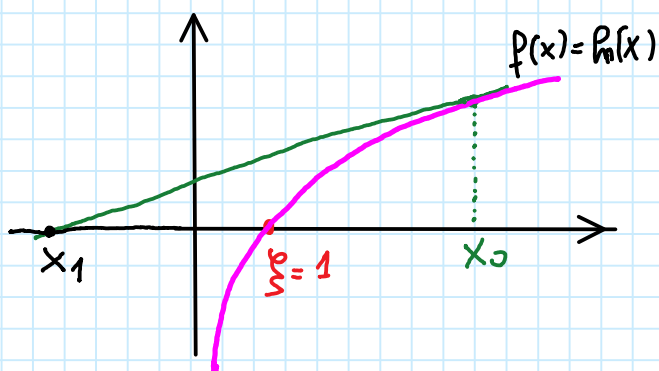
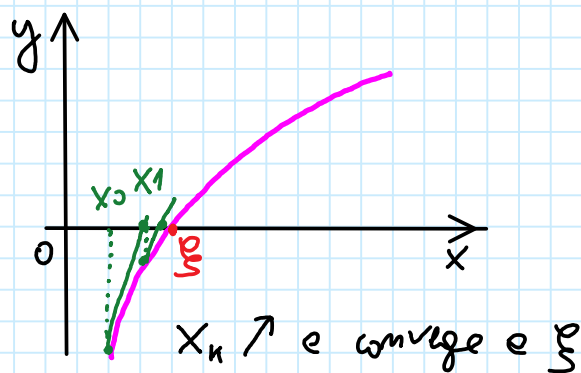
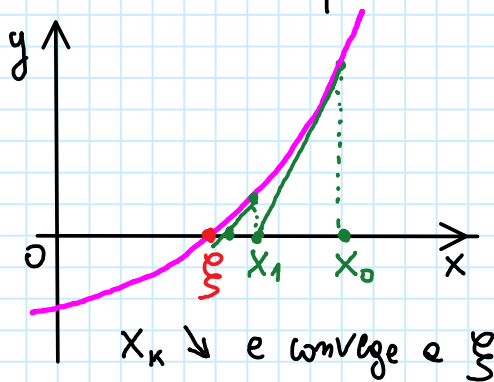
USO INTERPRETAZIONE GEOMETRICA

Dei due tipi di informazione:

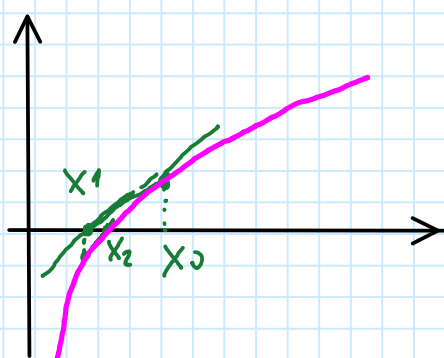
(•) dice se x_k converge o meno alla radice ξ che voglio approssimare. Note che ξ è radice di $p(x) = 0$ che può avere altre radici oltre a ξ .

(•) dice come x_n converge a ξ :

- monotono crescente;
- " decrescente;
- alternata;
- nessuna di queste



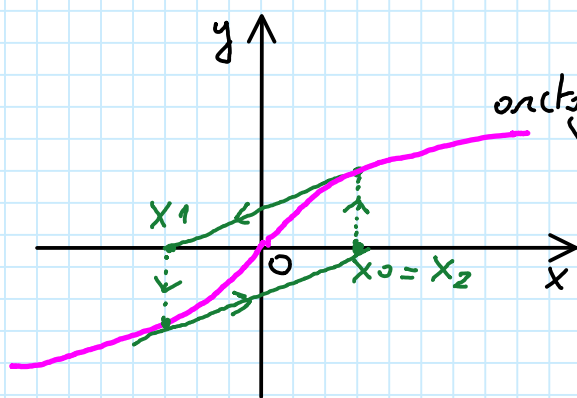
x_1 è fuori del dominio di p
 $\Rightarrow$ il metodo di Newton NON funziona!



x_0 è "più vicino" a ξ
 $\Rightarrow$ Newton converge con una successione

$$x_0 > x_1; x_1 < x_2 < x_3 < \dots < \xi$$

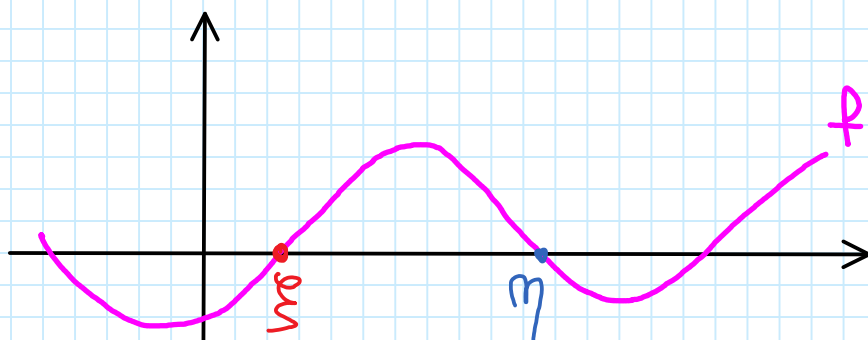
NOTA: si può dimostrare che la convergenza di Newton è locale (ossia con x_0 "abbastanza vicino" a ξ).



$\text{arctg}(x)$

Newton MN converge:
 $x_2 = x_0$ e poi si ripete!

ESERCIZIO Studiare il comportamento del metodo di Newton per approssimare le soluzioni di $f(x) = 0$ con f data dal graf. w

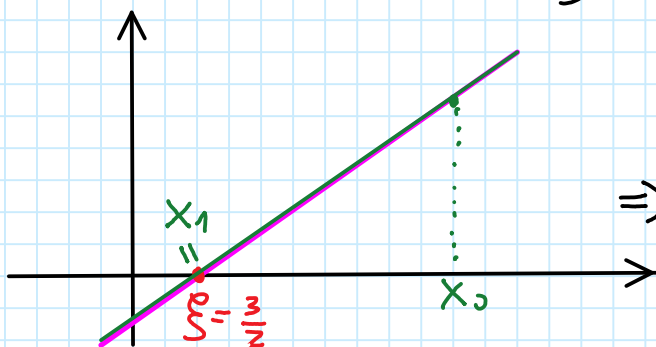


(a.) Dare un intervallo $[a, b]$ tale che se $x_0 \in [a, b]$ il metodo converge a ξ .

(b) Dire che tipo di convergenza è

(c) Proporre un x_0 tale che il metodo MN converga a ξ ma a η . Esiste uno x_0 siffatto con $x_0 < 0$?

ESERCIZIO Sia $f(x) = 2x - 3$. Calcolare le radici $\xi = 3/2$ col metodo di Newton. Quante iterazioni servono per avere un errore $e_k = \xi - x_k$ tale che $|e_k| < 10^{-6}$?



$$x_1 = \xi = 3/2$$

$$\Rightarrow e_1 = \xi - x_1 = 0.$$

ORDINE DI CONVERGENZA E COSTANTE ASINTOTICA DELL'ERRORE

Sia $f(x) = 0$ e ξ una radice. L'ordine di convergenza dipende dalla molteplicità di ξ .

DEF. La radice ξ di $f(x) = 0$ ha molteplicità $r \in \mathbb{N}$ se

$$f^{(i)}(\xi) = 0, \quad i = 0, \dots, r-1$$

$$f^{(r)}(\xi) \neq 0$$

In particolare se $r = 1$ la radice ξ si dice SINGOLA: e
 $f^{(0)}(\xi) = f(\xi) = 0$ e $f^{(1)}(\xi) = f'(\xi) \neq 0$.

ESEMPIO Sia $p(x) = e^x - 1 - x$ che ha radice $\xi = 0$.
 Troviamo la molteplicità.

$$f(\xi) = f(0) = e^0 - 1 - 0 = 1 - 1 = 0$$

$$f'(x) = e^x - 0 - 1 = e^x - 1 \Rightarrow f'(\xi) = f'(0) = e^0 - 1 = 0$$

$$f''(x) = e^x - 0 = e^x \Rightarrow f''(\xi) = f''(0) = e^0 = 1 \neq 0$$

Per cui $r = 2$.

Serve lo sviluppo in serie di Taylor di punto iniziale ξ :

$$f(x) = \sum_{i=0}^m \frac{f^{(i)}(\xi)}{i!} (x-\xi)^i + o((x-\xi)^m)$$

$$f(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-\xi)^2 + o((x-\xi)^2)$$

per $m = 2$. Notare che è

$$f'(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{f^{(i)}(\xi)}{i!} \cdot i \cdot (x-\xi)^{i-1} + o((x-\xi)^{m-1})$$

Per $m = 2$ e

$$p(x) = p(\xi) + p'(\xi)(x-\xi) + \frac{p''(\xi)}{2}(x-\xi)^2 + o((x-\xi)^2)$$

$$p'(x) = p'(\xi) + p''(\xi)(x-\xi) + o((x-\xi))$$

Ricavo il legame tra e_{n+1} ed e_n nell'ipotesi $p'(\xi) \neq 0$.

Ho def. metodo di Newton $x_n \approx \xi \Rightarrow$ sviluppi Taylor

$$\begin{aligned} e_{n+1} &\stackrel{\text{def.}}{=} \xi - x_{n+1} \stackrel{\text{metodo di Newton}}{=} \xi - \left[x_n - \frac{p(x_n)}{p'(x_n)} \right] \\ &= \xi - x_n + \frac{\underbrace{p(\xi)}_{\text{perché } \xi \text{ è radice}} + p'(\xi)(x_n - \xi) + \frac{p''(\xi)}{2}(x_n - \xi)^2 + o((x_n - \xi)^2)}{p'(\xi) + p''(\xi)(x_n - \xi) + o(x_n - \xi)} \\ &= \frac{\cancel{p'(\xi)(\xi - x_n)} + \underbrace{p''(\xi)(x_n - \xi)(\xi - x_n)}_{\text{perché } \xi \text{ è radice}} + \underbrace{(\xi - x_n) \cdot o(x_n - \xi)}_{\text{green}}}{p'(\xi) + p''(\xi)(x_n - \xi) + o(x_n - \xi)} \\ &+ \frac{\cancel{p'(\xi)(x_n - \xi)} + \underbrace{\frac{p''(\xi)}{2}(x_n - \xi)^2}_{\text{blue}} + \underbrace{o((x_n - \xi)^2)}_{\text{green}}}{p'(\xi) + p''(\xi)(x_n - \xi) + o(x_n - \xi)} \\ &= \frac{\underbrace{-\frac{p''(\xi)}{2}(x_n - \xi)^2}_{\text{blue}} + \underbrace{o((x_n - \xi)^2)}_{\text{green}}}{p'(\xi) + p''(\xi)(x_n - \xi) + o(x_n - \xi)} \\ &= \underbrace{(x_n - \xi)^2}_{\text{blue}} \cdot \frac{-\frac{p''(\xi)}{2} + \frac{o((x_n - \xi)^2)}{(x_n - \xi)^2}}{p'(\xi) + p''(\xi)(x_n - \xi) + o(x_n - \xi)} \end{aligned}$$

Quindi è

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{e_{k+1}}{e_k^2} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{-\frac{f''(\xi)}{2} + \frac{\sigma((x_n - \xi)^2)}{(x_n - \xi)^2}}{f'(\xi) + f''(\xi)(x_n - \xi) + \sigma(x_n - \xi)} \right|$$

||

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^2} = \frac{|f''(\xi)|}{2|f'(\xi)|}$$

Quindi, l'ordine del metodo è

(•) $p = 2$ se $f''(\xi) \neq 0$ con costante asintotica dell'errore $M = \frac{1}{2} \frac{|f''(\xi)|}{|f'(\xi)|}$

(•) $p > 2$ se $f''(\xi) = 0$.

ESERCIZIO Trovare una funzione, anche e livello grafico, con $p > 2$ per Newton.

Vediamo cosa succede se $f'(\xi) = 0$. Ossia ξ è radice non singola! In questo caso il metodo di Newton diventa di ordine $p = 1$. Se, inoltre, r è la molteplicità della radice, la costante asintotica dell'errore è

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = 1 - \frac{1}{r}$$

La prova è identica a quella di prima:

$$e_{n+1} = \xi - x_{n+1} = \xi - x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \xi - x_n + \frac{f(\xi + (x_n - \xi))}{f'(\xi + (x_n - \xi))}$$

↙ ξ è radice di molteplicità r nello scrivere gli sviluppi di Taylor....

Il metodo di Newton ritorna ad avere $p=2$ se lo modifichiamo:

$$\begin{cases} x_0 \text{ a caso (vicino a } \xi!) \\ x_{k+1} = x_k - r \cdot \frac{p(x_k)}{p'(x_k)}, \quad k=0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

metodo di
Newton modificato

Richiede di conoscere r !! Si dimostra che l'ordine di convergenza è $p=2$ (provare!) con

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^2} = \frac{1}{r \cdot (r+1)} \cdot \frac{|p^{(r+1)}(\xi)|}{|p^{(r)}(\xi)|}$$