Prof. Lidia Angeleri, Prof. Francesca Mantese
Università di Verona, 2014/2015
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Esercizi per il Corso di ALGEBRA

Foglio 11
8 gennaio 2015

1. Si consideri il polinomio $f = x^5 - 4x + 2$ in $\mathbb{Q}[x]$, sia F il suo campo di riducibilità completa e sia $G = \mathrm{Gal}(f/\mathbb{Q})$..
   (a) Si verifichi che f è irriducibile su $\mathbb{Q}$ e ha tre zeri reali e due zeri complessi coniugati.
   (b) Si verifichi che G contiene un elemento di ordine due.
   (c) Si mostri che esiste un campo intermedio $\mathbb{Q} \subset K \subset F$ tale che $|K : \mathbb{Q}| = 5$.
   (d) Si provi che G contiene un ciclo di lunghezza 5. (Sugg: si applichi il seguente teorema (Teorema di Cauchy): *Sia G un gruppo finito e sia p un primo. Se p divide l'ordine di G allora G contiene un elemento di ordine p*)
   (e) Si mostri che ogni sottogruppo di S_5 contenente un ciclo di lunghezza 5 e una trasposizione è isomorfo a S_5.
   (f) Si concluda che f non è risolubile per radicali.

   (*9 punti*)

2. Sia $\alpha = \sqrt{2} + i \in \mathbb{C}$. Si dimostri che:
   (a) $\mathbb{Q}(\alpha)$ è il campo di riducibilità completa di $x^4 + 16$ su $\mathbb{Q}$
   (b) Si trovi $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})$.
   (c) Si trovino i campi intermedi e si verifichi che ogni estensione intermedia è normale.
   (d) Il polinomio $x^4 + 16$ è risolubile per radicali?

   (8 punti)

3. Si dica se i seguenti enunciati sono veri o falsi (motivare la risposta).
   (a) Il campo di riducibilità completa di $x^3 + x^2 + x + 1$ su $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ è isomorfo al campo di Galois $GF(27)$
   (b) L'equazione $x^5 - 2x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ in $\mathbb{Q}$ è risolubile per radicali
   (c) Sia $\mathbb{Q} \subseteq F$ una estensione di Galois. Un elemento $\alpha \in F$ è primitivo se e solo se, per ogni $\varphi \neq \psi \in \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$, si ha $\varphi(\alpha) \neq \psi(\alpha)$.

   (*8 punti*)

4. Si determini il gruppo di Galois dell'estensione $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$. È ciclico? (*5 punti*)

Consegna: martedì 20 gennaio durante le esercitazioni.