TUTORAGGIO DI ANALISI II
ERRATA CORRIGE LEZIONE DEL 7/12/2012

DOTT.SSA SILVIA SAONCELLA

Esercizio 1. Discutere continuità, derivabilità direzionale e differenziabilità nell'origine per la seguente funzione:

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\sin(y+x)\log(1+y^2)}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Svolgimento. Studiamo la continuità. Vale la seguente maggiorazione:

$$|f(x,y)| \leq |\sin(y+x)| \cdot \underbrace{\frac{|\log(1+y^2)|}{y^2}}_{\text{tende a 1 per } y \to 0} \to 0, \text{ per } (x,y) \to (0,0).$$

Pertanto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0),$$

quindi la funzione è continua nell'origine.

Studiamo ora le derivate direzionali. Dato $v = (v_x, v_y) \neq (0,0)$ calcoliamo:

$$\begin{aligned}
\partial_v f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(v_x,v_y)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_x, tv_y)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\sin(tv_y + tv_x)\log(1+t^2v_y^2)}{t \cdot t^2(v_x^2+v_y^2)} \\
&= \lim_{t\to 0} \underbrace{\frac{\sin(tv_y+tv_x)}{tv_y+tv_x}}_{\text{tende a 1 per } t\to 0} \cdot \underbrace{\frac{\log(1+t^2v_y^2)}{t^2v_y^2}}_{\text{tende a 1 per } t\to 0} \cdot \frac{tv_y+tv_x}{t} \cdot \frac{v_y^2}{v_x^2+v_y^2} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{tv_y+tv_x}{t} \cdot \frac{v_y^2}{v_x^2+v_y^2} = \frac{v_y^2(v_y+v_x)}{v_x^2+v_y^2}
\end{aligned}$$

Quindi tutte le derivate direzionali nell'origine $\partial_v f(0,0)$ esistono. Tuttavia la mappa $v \mapsto \partial_v f(0,0)$ non è lineare, quindi la funzione non può essere differenziabile nell'origine.

Altro modo per vederlo: si ha $\partial_x f(0,0) = 0$ e $\partial_y f(0,0) = 1$, pertanto se il differenziale esistesse, dovrebbe essere la mappa $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi(x,y) = (\partial_x f(0,0), \partial_y f(0,0)) \cdot (x,y) = y.$$

Tuttavia, si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \varphi((x,y)-(0,0))}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\dfrac{\sin(y+x)\log(1+y^2)}{x^2+y^2} - y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Calcoliamo questo limite lungo la curva $\gamma_1(t) = (t, 0)$. Si ha allora immediatamente che tale limite vale 0. Calcoliamo questo limite lungo la curva $\gamma_2(t) = (mt, t)$ per $t \to 0^+$.

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\dfrac{\sin((m+1)t)\log(1+t^2)}{(m^2+1)t^2} - t}{\sqrt{(m^2+1)}t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\dfrac{\sin((m+1)t)}{(m+1)t}\dfrac{\log(1+t^2)}{t^2}\dfrac{(m+1)t}{m^2+1} - t}{\sqrt{(m^2+1)}t}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}\left(\frac{m+1}{m^2+1} - 1\right).$$

Tale limite in particolare dipende da m, pertanto il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \varphi((x,y)-(0,0))}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

non esiste, e quindi la funzione non può essere differenziabile.

Variante dell'esercizio precedente:

Esercizio 2. Discutere continuità, derivabilità direzionale e differenziabilità nell'origine per la seguente funzione:

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\sin(y+\sqrt{|x|})\log(1+y^2)}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Svolgimento. Studiamo la continuità. Vale la seguente maggiorazione:

$$|f(x,y)| \leq |\sin(y+\sqrt{|x|})| \cdot \underbrace{\frac{|\log(1+y^2)|}{y^2}}_{\text{tende a 1 per } y\to 0} \to 0, \text{ per } (x,y) \to (0,0).$$

Pertanto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0),$$

quindi la funzione è continua nell'origine.

Studiamo ora le derivate direzionali. Dato $v = (v_x, v_y) \neq (0,0)$ calcoliamo:

$$\partial_v f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(v_x,v_y)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_x, tv_y)}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin(tv_y+\sqrt{|tv_x|})\log(1+t^2v_y^2)}{t\cdot t^2(v_x^2+v_y^2)}$$
$$= \lim_{t\to 0} \underbrace{\frac{\sin(tv_y+\sqrt{|tv_x|})}{tv_y+\sqrt{|tv_x|}}}_{\text{tende a 1 per } t\to 0} \cdot \underbrace{\frac{\log(1+t^2v_y^2)}{t^2v_y^2}}_{\text{tende a 1 per } t\to 0} \cdot \frac{tv_y+\sqrt{|tv_x|}}{t} \cdot \frac{v_y^2}{v_x^2+v_y^2}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{tv_y+\sqrt{|tv_x|}}{t} \cdot \frac{v_y^2}{v_x^2+v_y^2}$$

Distinguiamo ora alcuni casi:

(1) se $v_y = 0$, allora il limite precedente è nullo: in particolare si ha che $\partial_x f(0,0) = 0$.
(2) se $v_x = 0$, allora il limite precedente si riduce a v_y: in particolare si ha che $\partial_y f(0,0) = 1$.
(3) se $v_x \neq 0$ e $v_y \neq 0$ allora si ha:

$$\lim_{t\to 0} \frac{tv_y+\sqrt{|tv_x|}}{t} \cdot \frac{v_y^2}{v_x^2+v_y^2} = \frac{v_y^2}{v_x^2+v_y^2} \cdot \lim_{t\to 0}\left(v_y + \frac{\sqrt{|v_x|}}{\text{sign}(t)\sqrt{|t|}}\right),$$

e, ricordando che $v_y \neq 0$ e $v_x \neq 0$,

$$\lim_{t\to 0^\pm} \frac{\sqrt{|v_x|}}{\text{sign}(t)\sqrt{|t|}} = \pm\infty,$$

si dimostra come il limite non esista. Pertanto in questo caso non esiste $\partial_v f(0,0)$.

Poiché vi sono derivate direzionali che non esistono, la funzione non può essere differenziabile nell'origine.