**TABELLA 12-2**

| Moto rettilineo | | Rotazione attorno a un asse fisso | |
|---|---|---|---|
| Spostamento | $x$ | Spostamento angolare | $\theta$ |
| Velocità | $v = \dfrac{dx}{dt}$ | Velocità angolare | $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ |
| Accelerazione | $a = \dfrac{dv}{dt}$ | Accelerazione angolare | $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$ |
| Massa (inerzia traslazionale) | $M$ | Momento d'inerzia | $I$ |
| Forza | $F = Ma$ | Momento della forza | $\tau = I\alpha$ |
| Lavoro | $W = \int F\,dx$ | Lavoro | $W = \int \tau\,d\theta$ |
| Energia cinetica | $\frac{1}{2}Mv^2$ | Energia cinetica | $\frac{1}{2}I\omega^2$ |
| Potenza | $P = Fv$ | Potenza | $P = \tau\omega$ |
| Quantità di moto | $Mv$ | Momento angolare | $I\omega$ |

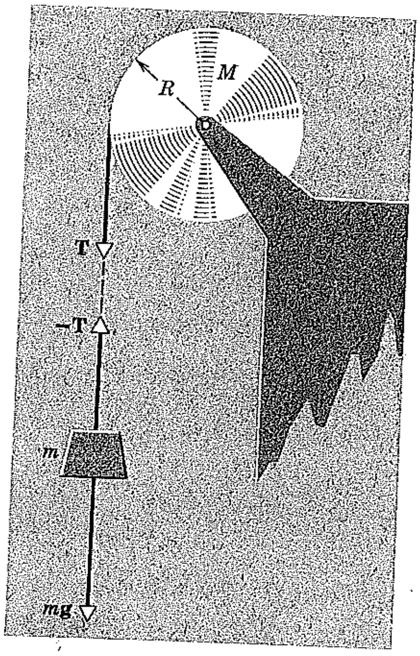


**FIGURA 12-12**
Esempio 4. Una forza costante **T** diretta in basso provoca la rotazione del disco. Esempio 5. In questo caso **T** è generata dalla forza di gravità agente sulla massa $m$.

Nella restante parte del capitolo ci limiteremo allo studio di corpi rigidi rotanti attorno ad assi fissi, mentre nel cap. 13 studieremo alcuni tipi più generali di moti rotatori.

**ESEMPIO 4**

Un disco omogeneo di raggio $R$ e di massa $M$ è montato su un perno sostenuto da supporti fissi e privi di attrito come in fig. 12-12. Una cordicella leggera è arrotolata sul bordo del disco e tirata verso il basso da una forza costante **T**. Trovare l'accelerazione angolare del disco e l'accelerazione tangenziale di un punto sul bordo.
La componente del momento di $T$ rispetto all'asse di rotazione è $\tau = TR$ e il momento d'inerzia del disco rispetto allo stesso asse è $I = \frac{1}{2}MR^2$. Dalla $\tau = I\alpha$ si ottiene

$$TR = (\tfrac{1}{2}MR^2)\,\alpha\,,$$

da cui

$$\alpha = \frac{2\,T}{MR}\,.$$

Se la massa del disco vale $M = 2{,}50$ kg, il raggio $R = 0{,}20$ m e la forza $T = 5{,}0$ N, allora

$$\alpha = \frac{2\,(5{,}0\ \text{N})}{(2{,}50\ \text{kg})\,(0{,}20\ \text{m})} = 20\ \text{rad/s}^2\,.$$

L'accelerazione tangenziale di un punto del bordo è data da

$$a = R\alpha = (0{,}20\ \text{m})\,(20\ \text{rad/s}^2) = 4{,}0\ \text{m/s}^2\,.$$

**ESEMPIO 5**

Supponiamo di appendere un corpo di massa $m$ alla corda dell'esempio precedente. Trovare l'accelerazione angolare del disco e quella tangenziale di un punto sul bordo.
Sia $T$ la tensione della corda. Poiché il corpo appeso accelera verso il basso, la forza di gravità, $mg$, agente su di esso deve vincere la reazione $T$ (diretta verso l'alto)

della corda sul corpo. Inoltre, l'accelerazione $a$ del corpo è uguale all'accelerazione tangenziale del punto sul bordo del disco. Perciò, dalla seconda legge di Newton,

$$mg - T = ma\,.$$

Il momento risultante agente nel disco è $TR$ e il suo momento d'inerzia è $\frac{1}{2} MR^2$, perciò, dalla $\tau = I\alpha$, si ottiene

$$TR = \tfrac{1}{2} MR^2\alpha\,.$$

Facendo uso della relazione $a = R\alpha$, possiamo scrivere quest'ultima equazione nella forma

$$2T = Ma\,.$$

Risolvendo contemporaneamente la prima e l'ultima equazione si ricava

$$a = \left(\frac{2m}{M + 2m}\right) g\,,$$

e

$$T = \left(\frac{Mm}{M + 2m}\right) g\,.$$

Se, come prima, poniamo $M = 2{,}50$ kg, $R = 0{,}20$ m e se il corpo appeso pesa 5,0 N, si ottiene

$$a = \frac{2\,mg}{M + 2\,m} = \frac{2\,(5{,}0\ \text{N})}{2{,}50\ \text{kg} + 2\,(5{,}0/9{,}8)\ \text{kg}} = 2{,}85\ \text{m/s}^2,$$

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{2{,}85\ \text{m/s}^2}{0{,}20\ \text{m}} = 14{,}3\ \text{rad/s}^2.$$

Si noti che le accelerazioni sono minori per un corpo appeso di 5,0 N che per una trazione costante di 5,0 N sulla corda (Esempio 4). Ciò è dovuto al fatto che la tensione della corda che fornisce il momento è ora minore di 5,0 N, cioè

$$T = \frac{M\,mg}{M + 2\,m} = \frac{(2{,}50\ \text{kg})\,(5{,}0\ \text{N})}{2{,}50\ \text{kg} + 2\,(5{,}0/9{,}8)\ \text{kg}} = 3{,}6\ \text{N}\,.$$

La tensione della corda deve essere minore del peso del corpo appeso se il corpo viene accelerato verso il basso.

---

**ESEMPIO 6**

Supponendo che il disco dell'Esempio 5 parta da fermo, calcolare il lavoro compiuto dal momento applicato al disco in 2,0 s. Calcolare anche l'aumento di energia cinetica rotazionale del disco.

Essendo costante il momento applicato, l'accelerazione angolare risultante è costante. Lo spostamento angolare totale con accelerazione angolare costante si ricava dall'eq. 11-5,

$$\theta = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\,\alpha t^2\,,$$

dove

$$\omega_0 = 0, \qquad \alpha = 14{,}3\ \text{rad/s}^2, \qquad t = 2{,}0\ \text{s}\,,$$

e quindi

$$\theta = 0 + \tfrac{1}{2}\,(14{,}3\ \text{rad/s}^2)\,(2{,}0\ \text{s})^2 = 28{,}6\ \text{rad}\,.$$

Il lavoro compiuto in uno spostamento angolare finito quando il momento è costante è

$$W = \tau\,(\theta_2 - \theta_1),$$

dove

$$\tau = TR = (3{,}6\ \text{N})\,(0{,}20\ \text{m}) = 0{,}72\ \text{N m}\,,$$

e

$$\theta_2 - \theta_1 = \theta = 28{,}6\ \text{rad}\,.$$

Perciò

$$W = (0{,}72\ \mathrm{N\,m})\,(28{,}6\ \mathrm{rad}) = 20{,}5\ \mathrm{J}\,.$$

Tale lavoro deve tradursi in un aumento di energia cinetica del disco. Il disco, partendo da fermo, acquista una velocità angolare $\omega$ e la sua energia cinetica rotazionale è $\frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} MR^2)\omega^2$. Per ricavare $\omega$ usiamo l'eq. 11-3,

$$\omega = \omega_0 + \alpha t\,,$$

dove

$$\omega_0 = 0\,, \qquad t = 2{,}0\ \mathrm{s}\,, \qquad \alpha = 14{,}3\ \mathrm{rad/s^2}\,,$$

e quindi

$$\omega = 0 + (14{,}3\ \mathrm{rad/s^2})\,(2{,}0\ \mathrm{s}) = 28{,}6\ \mathrm{rad/s}\,.$$

Allora

$$\tfrac{1}{2} I\omega^2 = \tfrac{1}{4}\,(2{,}50\ \mathrm{kg})\,(0{,}20\ \mathrm{m})^2\,(28{,}6\ \mathrm{rad/s})^2 = 20{,}5\ \mathrm{J}\,,$$

come nel caso precedente. Quindi l'aumento di energia cinetica del disco è uguale al lavoro compiuto dalla forza risultante sul disco, come previsto.

---

**ESEMPIO 7**

Dimostrate che per il sistema dell'Esempio 5 vale la conservazione dell'energia meccanica.

La forza risultante agente sul sistema è la forza di gravità sul corpo sospeso. Si tratta di una forza conservativa. Considerando il sistema globalmente, si vede che il corpo appeso perde, quando scende, una energia potenziale

$$U = mgy\,,$$

dove $y$ è il tratto verticale percorso dal corpo durante la discesa. Contemporaneamente il corpo acquista energia cinetica di traslazione e il disco di rotazione. L'energia cinetica totale acquistata dal sistema è

$$\tfrac{1}{2} mv^2 + \tfrac{1}{2} I\,\omega^2\,,$$

dove $v$ è la velocità lineare del corpo appeso. Dobbiamo dimostrare che

$$mgy = \tfrac{1}{2} mv^2 + \tfrac{1}{2} I\omega^2.$$

Per il moto traslatorio si ha $v^2 = 2\,ay$, essendo nulla la velocità iniziale. Dall'Esempio 5 abbiamo che $a = 2\,mg/(M + 2\,m)$. Quindi

$$mgy = \frac{mg\,v^2}{2a} = \tfrac{1}{2} mv^2\left(\frac{g}{a}\right) = \tfrac{1}{2} mv^2\left(\frac{M + 2\,m}{2\,m}\right) = \tfrac{1}{4}\,(M + 2\,m)\,v^2.$$

Sappiamo anche che $\omega = v/R$ e $I = \frac{1}{2} MR^2$. Allora:

$$\tfrac{1}{2} mv^2 + \tfrac{1}{2} I\omega^2 = \tfrac{1}{2} mv^2 + \tfrac{1}{2}\,(\tfrac{1}{2} MR^2)\,(v^2/R^2) = \tfrac{1}{4}\,(M + 2\,m)\,v^2$$

l'energia meccanica quindi si conserva.

---

**ESEMPIO 8**

Ricavare la relazione $L = I\omega$ elencata nella Tabella 12-2 per il momento angolare di un corpo rigido rotante attorno a un asse fisso.

Partendo dalla relazione scalare $\tau = I\alpha$ e dalla definizione di $\alpha\ (= d\omega/dt)$, possiamo scrivere

$$\tau = I\alpha = I\,(d\omega/dt) = d\,(I\omega)/dt\,,$$

nella quale l'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che $I$ è costante per un dato corpo rigido e un determinato asse di rotazione (fisso).