Lezione **XXIII**

✧ Prodotto tensoriale di spazi vettoriali

$$\underbrace{V \otimes_K W}_{\text{sp. vettoriali (su } K\text{) campo}}$$

si generalizza in modo ovvio

$$= \{ \pi : \underbrace{V^* \times W^*}_{\text{duali}} \longrightarrow K \ , \ \pi \ \underbrace{\text{bilineare}}_{\text{lineare in entrambi gli argomenti}} \}$$

[in dim. finita $V^{**} \cong V$ e l'isomorfismo è CANONICO, ossia non dipende dalla scelta di basi]

$$v \otimes w \equiv \pi : (x^*, y^*) \longmapsto \underbrace{\underset{K}{x^*(v)} \ \underset{K}{y^*(w)}}_{\in K}$$

notare: $\alpha(v \otimes w) = \alpha v \otimes w = v \otimes \alpha w$ $\quad (\alpha \in K)$

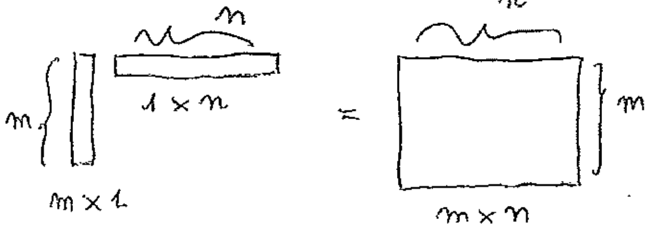
$$V \otimes W = \{ \sum \beta_i (v_i \otimes w_i) \}$$

↳ diventa uno spazio vettoriale (prodotto tensoriale di V e W) [in part.: $(\alpha v_1 + \beta v_2) \otimes w = \alpha (v_1 \otimes w) + \beta (v_2 \otimes w)$ ecc.]

Es importante $\quad \mathrm{Hom}(V, W) \cong W \otimes V^*$

[osservare: $(w \otimes v^*)(u) = \underbrace{v^*(u)}_{\in K} w \ldots$] $\quad u \in V$, $\ v^*(u)\, w \in W$

concretamente:



cf: Dirac $|w\rangle\langle v|$

Qualche dettaglio in più $(e_1 \dots e_n)$ base di V
$(f_1 \dots f_m)$ base di W

$$V\otimes W = \Big\{\sum_{i,j} a_{ij}(e_i\otimes f_j)\Big\}$$

$\dim(V\otimes W) = \dim V \cdot \dim W$

$$W\otimes V^* = \Big\{\sum_{i,j} a_{ij}(f_i\otimes e_j^*)\Big\}$$

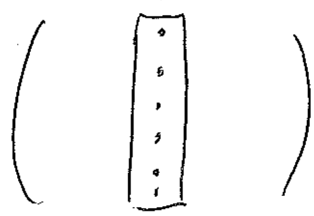
$$\sum a_{ij}\, f_i\otimes e_j^*\,(\,\cdot\,, e_k)$$

$$= \sum a_{ij} f_i\, e_j^*(e_k) = \sum a_{ij} f_i\, \delta_{jk} =$$

$$= \sum a_{ik} f_i$$

colonna k-esima

$$e_k \longmapsto \sum_{i=1}^{m} a_{ik} f_i$$



Te_k

Se $V \overset{\langle,\rangle}{\cong} V^*$

ket bra

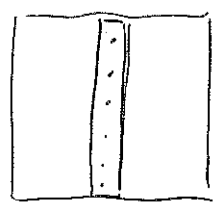
$$V\otimes V^* = \Big\{\sum_{i,j} a_{ij}|e_i\rangle\langle e_j|\Big\}$$

$$\Big(\sum a_{ij}|e_i\rangle\langle e_j|\Big)|e_k\rangle = \sum a_{ij}|e_i\rangle\overbrace{\langle e_j|e_k\rangle}^{\delta_{jk}}$$

$$= \sum a_{ik}|e_i\rangle$$

n

n



Te_k

come sopra

isomorfismi musicali
.. reprise

$K = \mathbb{R}$

$\langle\, , \rangle$ prodotto scalare (f. bilineare simmetrica definita positiva)

$\langle\, , \rangle$ induce un isomorfismo

isomorfismi musicali $\equiv$ raising - lowering

$V \cong V^*$ tramite bemolle

$$v \xmapsto{\flat} \langle v, \cdot \rangle \equiv v^\flat$$

$$(\flat^{-1} = \# : V^* \longrightarrow V)$$

diesis

Cf. la notazione di Dirac!

Se $\langle\, , \rangle$ è rappresentato da (g_{ij}) matrice simm. def. positiva

$$\underset{\Downarrow}{V^*} \qquad \underset{\Downarrow}{V}$$

$$v_i := g_{ij} v^j$$

indice in basso $\equiv \flat$

Convenzione di Einstein: sommo sugli indici ripetuti

$$\boxed{g_{ij}}\,\boxed{v^j}$$

produco un vettore che leggo come funzionale

$$\langle v, w \rangle \equiv g_{ij} v^i w^j$$

$$\| v \|^2 = g_{ij} v^i v^j$$

$$(v^j) \xmapsto{\flat} (g_{ij} v^j) \equiv (v_i)$$

$$(v_i) \xmapsto{\#} g^{ij} v_j \equiv (v^i)$$

$$(g^{ij}) = G^{-1} \quad \text{ove } G = (g_{ij})$$

$$g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$$

inoltre:

$$V \underset{\text{canonico}}{\cong} V^{**}$$

$$V \ni x \longmapsto x^{**} \in V^{**}$$

$$x^{**} : \underset{\substack{\Psi \\ v^*}}{V^*} \longrightarrow K$$ ed è definito così:

$$x^{**}(v^*) := v^*(x)$$

In generale:

$$\overbrace{V^* \otimes V^* \cdots V^*}^{q} \otimes \overbrace{V \otimes \cdots V}^{p} ;$$

$$\left\{ T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \right\}$$

appl. multilineari da

$$\underbrace{V \times \cdots V}_{q} \times \underbrace{V^* \times \cdots V^*}_{p} \to \mathbb{R}$$

Tensori (p, q)

p volte contravarianti

q volte covarianti

Es. (g_{ij}) tipo $(0,2)$

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$
$$((v^i),(w^j)) \longmapsto g_{ij} v^i v^j$$

(v^i) tipo $(1,0)$

(v_i) tipo $(0,1)$

Campi tensoriali: sezioni di fibrati tensoriali
(formati a partire da TM e T^*M.)

Come tali, devono avere opportune leggi di trasformazione rispetto ai cambiamenti di coordinate:

$V \rightsquigarrow T_x M$
$V^* \rightsquigarrow T_x^* M$
$x \in M$

$$\tilde{T}^{k_1 \ldots k_p}_{l_1 \ldots l_q} = T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \underbrace{\frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial y^{k_p}}{\partial x^{i_p}}}_{\text{controvarianza}} \underbrace{\frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{l_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial y^{l_q}}}_{\text{covarianza}}$$

Verifichiamolo in dettaglio per il tensore metrico g_{ij} di una varietà riemanniana (M, g)

g campo tensoriale simmetrico di tipo $(0,2)$ definito positivo

Una varietà differenziabile può sempre essere dotata di una struttura di varietà riemanniana: questa può essere definita localmente: g_α su $\mathcal{U}_\alpha$

e si pone $g = \sum \rho_\alpha g_\alpha$ $\{\rho_\alpha\}$ partizione dell'unità

Ciò è utile in molte questioni teoriche, come ad esempio nella teoria di Morse (avevamo bisogno di gradienti)

$$\nabla f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad (df(x), X) =: g(\nabla f, X)$$

dualità

∇f corrisponde a df tramite il teorema di Riesz:

$\nabla f = \# df$

★ ★ esempio concreto: legge di trasformazione di una metrica Riemanniana

campo tensoriale simmetrico di tipo $(0,2)$ (definito positivo)

$y = y(x) \qquad x = x(y)$

$$\boxed{\tilde{g}_{ij}(y) = g_{kl}(x)\,\frac{\partial x^k}{\partial y^i}\frac{\partial x^l}{\partial y^j}}$$

si usa la convenzione di Einstein

ancora più schematicamente: $\tilde{g}_{ij} = g_{kl}\dfrac{\partial x^k}{\partial y^i}\dfrac{\partial x^l}{\partial y^j}$ ← si somma su k e l

Perchè? ds^2 deve essere invariante rispetto ad un cambiamento di coordinate qualsiasi

[Cf il principio di covarianza generale in teoria della relatività generale (Einstein)]

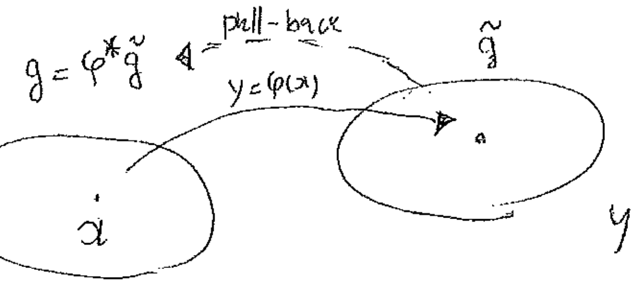
$(ds^2 = g_{ij}\,dx^i dx^j)$ $\qquad dx^i dx^j \equiv \frac{1}{2}\left(dx^i \otimes dx^j + dx^j \otimes dx^i\right)$

prodotto tensoriale simmetrico

Deve essere dunque

$$\tilde{g}_{ij}\,dy^i dy^j = g_{kl}\,dx^k dx^l$$

indici muti $\qquad\qquad$ indici muti



Vediamo:

$$ds^2 = \tilde{g}_{ij}\, dy^i dy^j = g_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^l}{\partial y^j} \underbrace{\frac{\partial y^i}{\partial x^m} dx^m}_{dy^i} \underbrace{\frac{\partial y^j}{\partial x^n} dx^n}_{dy^j}$$

m e n muti.

$$= g_{kl} \underbrace{\frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial y^i}{\partial x^m}}_{\frac{\partial x^k}{\partial x^m} = \delta^k_m} \underbrace{\frac{\partial x^l}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial x^n}}_{\delta^l_n} dx^m dx^n$$

$$= g_{kl}\, dx^k dx^l \qquad \square$$

È chiaro come si opera in generale: es.

$$\tilde{T}^i_{\ jk} = T^l_{\ mn} \frac{\partial x^m}{\partial y^j} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial y^k} \cdot \frac{\partial y^i}{\partial x^l}$$

(1, 2)

$$\tilde{T}^{k_1 \dots k_p}_{\ l_1 \dots l_q} = T^{i_1 \dots i_p}_{\ j_1 \dots j_q} \cdot \underbrace{\frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial y^{k_p}}{\partial x^{i_p}}}_{\text{contravarianza}} \cdot \underbrace{\frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{l_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial y^{l_q}}}_{\text{covarianza}}$$

(p, q)