TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE (Prof. M. Spera)

a.a. 2010/11

Prova scritta del 19 settembre 2011

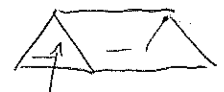
① Nel semispazio $\{x>0\}$ in $\mathbb{R}^3$, si determini $\lambda \in C^\infty(\{x>0\})$, $\lambda > 0$ tale che

$$\omega = x\,dy + \lambda\,dz$$

dia luogo ad una distribuzione integrabile.

Qual è la dimensione di quest'ultima?

② Dopo aver verificato che $\omega' = dy + dz$ dà luogo ad una distribuzione integrabile di dim 2 in $\mathbb{R}^3$, determinare due campi vettoriali X e Y commutanti che generino punto per punto la distribuzione data.

③ Determinare $H^*(X)$, con $X =$ 

questa faccia esclusa

④ Determinare, in più modi $T_I\, SO(3)$.

⑤ Sia data la varietà riemanniana $\left(\mathbb{H}, ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}\right)$, $\mathbb{H} = \{y>0\}$

Calcolare il gradiente riemanniano di $\lambda = y$. È un campo di Killing?

$X = \frac{\partial}{\partial x}$ è un campo di Killing?

Tempo a disposizione: 1h 15m

Le risposte vanno adeguatamente giustificate

Topogeo
1/9/11

① In $\{x>0\}$

$$\omega = x\,dy + \lambda\,dz \qquad \lambda \in C^\infty_{\lambda>0}(\mathbb{R}^3)$$

det. λ in modo che ω dia luogo ad una distribuzione integrabile (dim $=2$).

Sol.
$$d\omega = dx\wedge dy + d\lambda\wedge dz$$
$$= dx\wedge dy + \frac{\partial\lambda}{\partial x}dx\wedge dz + \frac{\partial\lambda}{\partial y}dy\wedge dz + \frac{\partial\lambda}{\partial z}\underbrace{dz\wedge dz}_{=0}$$

$\omega\wedge d\omega = 0$
$$\lambda\,dz\wedge dx\wedge dy + x\frac{\partial\lambda}{\partial x}dy\wedge dx\wedge dz = 0$$

$$\lambda\,dx\wedge dy\wedge dz - x\frac{\partial\lambda}{\partial x}dx\wedge dy\wedge dz = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda - x\frac{\partial\lambda}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x} = \frac{\lambda}{x} \qquad \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\log\lambda) = \frac{1}{x}$$

$$\log\lambda = \log|x| + c(y,z) = \log x + c(y,z)$$

$$\boxed{\lambda(x,y,z) = \underbrace{C(y,z)}_{>0 \text{ arbitraria}}\,x}$$

Controllo:

$$\omega = x\,dy + x G\,dz$$

$$d\omega = dx\wedge dy + d(xG)\wedge dz = dx\wedge dy + (G\,dx + x\,dG)\wedge dz$$

$$= dx\wedge dy + G\,dx\wedge dz + x\frac{\partial G}{\partial y}\,dy\wedge dz$$

$$\omega\wedge d\omega = xG\,dz\wedge dx\wedge dy + xG\,dy\wedge dx\wedge dz =$$

$$= \underbrace{(-xG + xG)}_{\overset{\shortparallel}{0}}\,dx\wedge dy\wedge dz = 0$$

(2) Dopo aver verificato che $\omega' = dy + dz$ dà luogo ad una distr. integrabile di dim 2 determinare due campi vettoriali X, Y commutanti che generino pto per punto: la distribuzione data

Sol. $d\omega' = 0 \Rightarrow d\omega'\wedge\omega' = 0$

$\omega' = d(y+z)$ $\qquad f = y + z = \text{cost}$

piani.

possiamo prendere $X = \dfrac{\partial}{\partial x}$ $\qquad$ È subito $[X,Y] = 0$

$Y = \dfrac{\partial}{\partial y} - \dfrac{\partial}{\partial z}$

È chiaro che $X \in \ker\omega$ e così pure Y:

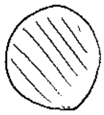
$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}\right) = (dy + dz)\left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}\right) = 1 + 0 - 0 - 1 = 0$$

Topogeo
1/9/11

(3) determinare X

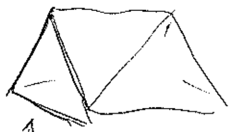
$H^*\Big($  $\Big)$

esclusa

$X \approx$  disco chiuso $\sim \; \bullet$ contraibile $\Rightarrow H^*(X) = \begin{cases} \mathbb{R} & \dim = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

oppure $H^0(X) = \mathbb{R}$ (chiaro..)

$H^1(X) = 0$: ogni 1-ciclo è un bordo



anche questo...

non ci sono 2-cicli...

(4) Determinare $T_I\, SO(3)$

di fatto è l'algebra di Lie di $SO(3)$ $\Rightarrow$ matrici antisimmetriche

oppure: $SO(3) \subset M(3, \mathbb{R})$

$$O O^T = 1 \qquad \det O = 1$$

$O = O(t)$ curva uscente da I, in $SO(3)$

$$O^T O = 1 \qquad \dot{O}^T O + O^T \dot{O} = 0$$

in $O = I$: $\dot{O}^T + \dot{O} = 0 \Rightarrow \dot{O}(0) =$ matr. antisimmetrica

inoltre $\frac{d}{dt} \det O \equiv 0$ $\qquad \det e^X = e^{\operatorname{tr} X}$

$O = e^X$ $\qquad \frac{d}{dt} \det e^{X(t)} = e^{\operatorname{tr} X} \cdot \frac{d}{dt} \operatorname{Tr} X$

$\Rightarrow \operatorname{Tr} X = \text{cost} \Rightarrow \operatorname{Tr} X = 0$

già soddisfatto...

(5) In $(\mathbb{H}, \underbrace{ds^2}_{\frac{dx^2+dy^2}{y^2}})$

calcolare il gradiente riemanniano di

$$\lambda = y$$

Sol: $\nabla\lambda = (d\lambda)^{\#}$ $\quad d\lambda = dy \sim (0,1)$

$$\boxed{g^{ij}v_j = v^i}$$

$G = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} y^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix}$

$G^{-1} = \begin{pmatrix} y^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}$ $\quad \Rightarrow \quad \nabla\lambda = y^2 \frac{\partial}{\partial y}$

È Killing?

$$X = y^2 \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\mathcal{L}_X g = \mathcal{L}_{y^2\frac{\partial}{\partial y}}\left(\frac{1}{y^2} dx\otimes dx + \frac{1}{y^2} dy\otimes dy\right)$$

$\boxed{\mathcal{L}_\circ dy = 2y\, dy \text{ v. altro}}$

$$= \underbrace{\mathcal{L}_{y^2\frac{\partial}{\partial y}}\left(\frac{1}{y^2}\right)}_{X\left(\frac{1}{y^2}\right)} dx\otimes dx + \ldots 0 + \mathcal{L}_{y^2\frac{\partial}{\partial y}}\left(\frac{1}{y^2}\right) dy\otimes dy$$

$$+ \frac{1}{y^2}\mathcal{L}_\circ dy\otimes dy$$

$$+ \frac{1}{y^2} dy\otimes \mathcal{L}_\circ dy$$

$$= \underbrace{y^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y^2}\right)}_{y^2\cdot(-2)y^{-3}} dx\otimes dx$$

$$\underbrace{y^2\cdot(-2)y^{-3}}_{-2y^{-1}} dx\otimes dx$$

$$-2y^{-1} dx\otimes dx$$

$$= -2y^{-1} dy\otimes dy + 2y^{-1} dy\otimes dy + 2y^{-1} dy\otimes dy$$

(v. pag. successiva)

$$\mathcal{L}_{y^2\frac{\partial}{\partial y}} dy = d\,\mathcal{L}_{y^2\frac{\partial}{\partial y}} y =$$

$$= d\,(y^2 \underbrace{\tfrac{\partial}{\partial y} y}_{=1}) = d\,(y^2) = 2y\,dy$$

$$\frac{1}{y^2}\cdot 2y = 2y^{-1}$$

in definitiva:

$$\mathcal{L}_X g = -2y^{-1}dx^2 + (\cancel{-2y^{-1}} + \cancel{2y^{-1}} + 2y^{-1})dy^2 \neq 0$$

$$= -2y^{-1}(dx^2 - dy^2) \neq 0$$

X non è di Killing.

$Z = \frac{\partial}{\partial x}$ lo è?

sì: g è inv. per traslazioni