Ricevimento del 22 Gennaio 2013

Davide Boscaini

Queste sono le note del ricevimento del 22 Gennaio. Invito chi trovasse ulteriori errori a segnalarli presso davide.boscaini@studenti.univr.it.

Esercizio 1. Studiare la funzione di $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-6}{x}}$.

Soluzione. 1. Dominio: per quanto riguarda il dominio della funzione, le condizioni da imporre sono due: l'argomento della radice dev'essere non negativo e il denominatore della frazione dev'essere diverso da zero. Queste due condizioni si possono riassumere nella richiesta

$$\frac{x^2-6}{x} \geq 0,$$

la cui soluzione è ottenibile risolvendo il sistema seguente

$$\begin{cases} x^2 - 6 \geq 0, \\ x > 0. \end{cases}$$

L'equazione $x^2 - 6 = 0$ rappresenta una parabola rivolta verso l'alto e intersecante l'asse x nei punti $A = (\sqrt{6}, 0)$ e $B = (-\sqrt{6}, 0)$. Per cui la soluzione della prima disequazione è data dai punti

$$x \leq -\sqrt{6} \cup x \geq \sqrt{6}.$$

La soluzione globale del sistema, derivando esso da una frazione, si ottiene con la *tabella dei + e −*. In questo modo si trova che il dominio è

$$D = \{-\sqrt{6} \leq x < 0\} \cup \{x \geq \sqrt{6}\}.$$

2. Intersezione con gli assi cartesiani: cominciamo con l'intersezione con l'asse delle ordinate, ovvero

$$\begin{cases} y = \sqrt{\frac{x^2-6}{x}}, \\ x = 0. \end{cases}$$

È facile vedere che tale sistema non ha soluzione: la funzione non interseca l'asse y. Per quanto riguarda l'intersezione con l'asse delle ascisse il sistema da risolvere è

$$\begin{cases} y = \sqrt{\frac{x^2-6}{x}}, \\ y = 0, \end{cases}$$

la cui soluzione è data dagli zeri dell'equazione $x^2 - 6 = 0$, che sono $x_1 = \sqrt{6}$ ed $x_2 = -\sqrt{6}$ (rispettivamente i punti A e B precedentemente individuati).

3. Segno: preso un qualsiasi $x \in D$, la radice sarà ben definita e quindi positiva. Quindi il segno della funzione è sempre positivo.

4. Limiti: l'unico punto in cui non conosciamo il comportamento della funzione è l'origine ($x = 0$), vorremmo inoltre conoscere il comportamento asintotico di f ($x = +\infty$). Calcoliamoci quindi i limiti corrispondenti:

$$\lim_{x\to 0^-} \sqrt{\frac{x^2-6}{x}} = \lim_{x\to 0^-} \sqrt{x - \frac{6}{x}} = \sqrt{0^- - (-\infty)} = \sqrt{+\infty} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{\frac{x^2-6}{x}} = \lim_{x\to +\infty} \sqrt{\frac{x^2(1-6/x^2)}{x}} = \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x(1-6/x^2)} = \sqrt{+\infty} = +\infty.$$

Dal momento che, per $x \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$, ha senso chiedersi se ci sono asintoti obliqui. Ricordiamo che un asintoto obliquo del tipo $y = mx + q$ esiste se

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} := m \quad \text{esiste finito e diverso da } 0$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx := q \quad \text{esiste finito.}$$

Nel nostro caso però

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^2-6}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2-6}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{x}\left(1-\frac{6}{x^2}\right)} = 0,$$

possiamo quindi concludere che non esiste alcun asintoto obliquo.

5. Derivata prima: dal momento che f è una funzione composta, per calcolarne la derivata prima dobbiamo seguire la *regola della catena*: sia $f(x) = g(h(x))$, allora

$$f'(x) = (g(h(x)))' = g'(h(x))h'(x).$$

Nel nostro caso la funzione $h(x)$ è la frazione $\frac{x^2-6}{x}$, mentre la funzione $g(y)$ è la radice quadrata $\sqrt{y}$. Tenendo conto di tutto ciò, si ha che la derivata prima è

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-6}{x}\right)^{-1/2}\left(\frac{2xx-(x^2-6)1}{x^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2-6}{x}}}\left(\frac{2x^2-x^2+6}{x^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{x^2+6}{x^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2-6}{x}}} \\ &= \frac{x^2+6}{2x^2\sqrt{\frac{x^2-6}{x}}}. \end{aligned}$$

Notiamo innanzitutto che la derivata prima non esiste su tutto il dominio D, il suo denominatore infatti si annulla nei due punti A e B. Indicato allora con D' il dominio di $f'(x)$, si ha:

$$D' = D \setminus \{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}.$$

6. Crescenza/decrescenza: sia ora $x \in D'$, ci chiediamo: per quali valori di x la funzione è crescente? Dalla teoria svolta a lezione sappiamo che questo coincide con la richiesta $f'(x) > 0$. Dobbiamo quindi individuare per quali $x \in D'$

$$\frac{x^2+6}{2x^2\sqrt{\frac{x^2-6}{x}}} > 0.$$

Osserviamo ora che, al denominatore, compare come termine moltiplicativo la funzione di partenza f. Per quanto già visto grazie allo studio del segno (punto 3.), $f(x) > 0$ per ogni $x \in D$. Questo sarà vero a maggior ragione in D', visto che $D' \subsetneq D$, quindi la condizione si semplifica in

$$\frac{x^2+6}{2x^2} > 0,$$

che è sempre verificata in D'. Di conseguenza, per ogni $x \in D'$, $f'(x) > 0$, quindi la funzione è sempre crescente.

7. Punti stazionari: come conseguenza del fatto che la funzione è sempre crescente si ha che non possono esistere minimi o massimi relativi in D'. Infatti, se per ogni $x \in D'$, $f'(x) > 0$ non può esistere un $\bar{x} \in D'$ tale per cui $f'(\bar{x}) = 0$, che, come noto, è la condizione di stazionarietà.

8. Derivata seconda: per cominciare possiamo vedere $f'(x)$ come prodotto di due funzioni $\alpha(x)$ e $\beta(x)$

$$f'(x) = \underbrace{\frac{x^2+6}{2x^2}}_{\alpha(x)} \underbrace{\sqrt{\frac{x}{x^2-6}}}_{\beta(x)},$$

quindi per calcolare $f''(x)$ dobbiamo applicare la *regola di Leibniz* sulla derivata del prodotto di funzioni, che ricordo essere

$$(\alpha(x)\beta(x))' = \alpha'(x)\beta(x) + \alpha(x)\beta'(x).$$

Quindi

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \alpha'(x)\beta(x) + \alpha(x)\beta'(x) \\
&= \left(\frac{2x(2x^2) - (x^2+6)4x}{4x^4}\right)\sqrt{\frac{x}{x^2-6}} + \left(\frac{x^2+6}{2x^2}\right)\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2-6}{x}}\left(\frac{x^2-6-2x^2}{(x^2-6)^2}\right) \\
&= -\frac{6}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x^2-6}} - \sqrt{\frac{x^2-6}{x}}\frac{1}{4x^2}\frac{(x^2+6)^2}{(x^2-6)^2} \\
&= \frac{\frac{-24x(x^2-6) - x(x^2+6)^2}{4x^3(x^2-6)^2}}{\sqrt{\frac{x}{x^2-6}}} \\
&= -\frac{x^4+36x^2-108}{4x^2(x^2-6)^2} f(x).
\end{aligned}$$

Notiamo che tale funzione esiste per ogni $x \in D'$.

9. Punti di flesso: ci chiediamo se esistono dei punti in cui la funzione cambia concavità, ovvero per quali $x \in D'$

$$f''(x) = -\frac{x^4 + 36x^2 - 108}{4x^2(x^2-6)^2} f(x) = 0.$$

Ancora una volta notiamo che all'interno dell'espressione della derivata seconda compare la funzione di partenza. Ricordandoci che questa è sempre positiva su D', possiamo limitarci a chiedere che

$$-\frac{x^4 + 36x^2 - 108}{4x^2(x^2-6)^2} = 0 \text{ cioè } x^4 + 36x^2 - 108 = 0.$$

Sia ora $t = x^2$, quindi $x^4 + 36x^2 - 108 = t^2 + 36t - 108$ e l'equazione $t^2 + 36t - 108 = 0$ ha come soluzione

$$t_{1,2} = \frac{-36 \pm \sqrt{36^2 + 4 \cdot 108}}{2} = -18 \pm \sqrt{\frac{1296 + 432}{4}} = -18 \pm \sqrt{432} = -18 \pm 12\sqrt{3}.$$

Ricordandosi della sostituzione fatta segue facilmente che le quattro radici del polinomio di partenza sono

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-18 + 12\sqrt{3}} \text{ e } x_{3,4}\pm = \sqrt{-18 - 12\sqrt{3}}.$$

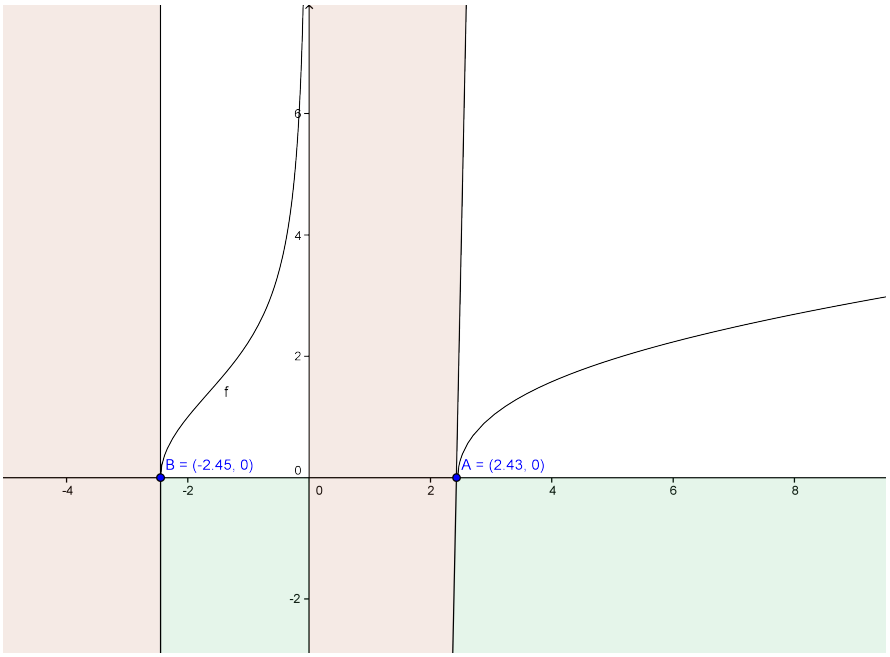
Dal momento che $12\sqrt{3} \approx 20.78$, solo $x_1 \approx 1.67$ e $x_2 \approx -1.67$ sono radici reali. Questo ci dice che il nostro grafico ha due cambi di concavità, anche se solo x_2 "cade" nel dominio della funzione (nel grafico finale tale punto è stato indicato con C e le relative coordinate con x_C ($\equiv x_2$) ed y_C).

10. Convessità/concavità: per quanto riguarda lo studio del segno della derivata seconda ci chiediamo per quali $x \in D'$, $f''(x) > 0$, cioè in quali intervalli la funzione è convessa. Gran parte del lavoro è già stato fatto nel punto precedente, si tratta ora solo di trarre delle conclusioni: $y = t^2 + 36t - 108$ è l'equazione di una parabola rivolta verso l'alto e passante per i punti $P = (t_1, 0)$ e $Q = (t_2, 0)$. Quindi $t^2 + 36t - 108 < 0$ per $t_2 < t < t_1$, cioè se

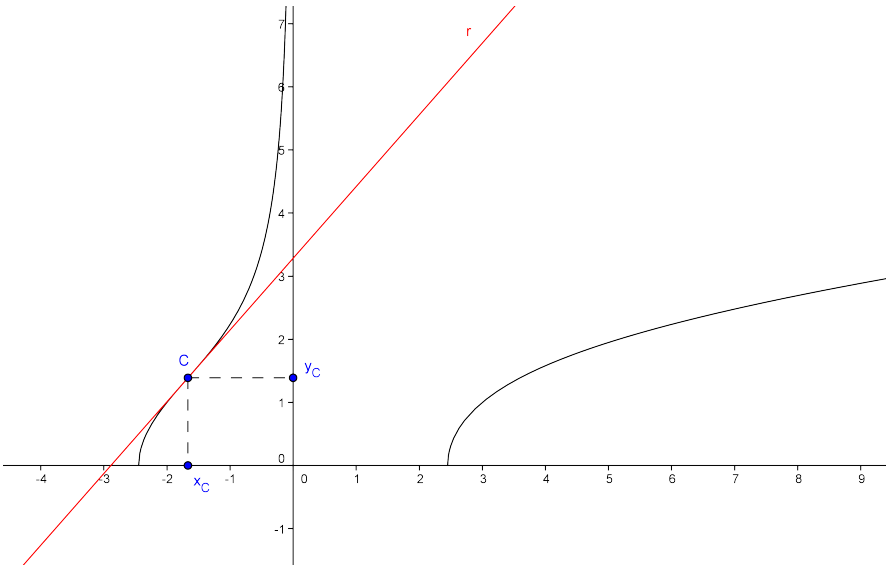
$$\begin{cases} x^2 - t_1 < 0, \\ x^2 - t_2 > 0. \end{cases}$$

Ora $x^2 - t_1 < 0$ è verificato se $x_2 := -\sqrt{t_1} < x < \sqrt{t_1} := x_1$, mentre $x^2 - t_2 > 0$ è verificato per ogni $x \in D'$. In conclusione quindi $f''(x) > 0$, cioè f è convessa, per $x_2 < x < x_1$.

11. Grafico definitivo: ora che abbiamo tutte le informazioni di cui necessitavamo possiamo tracciare il grafico definitivo della funzione data:



12. Ultime precisazioni: qui sotto potete infine trovare il particolare del flesso a tangente obliqua in C:



L'equazione della tangente obliqua del flesso è data da $r : y = f'(x_C) \cdot (x - x_C) + f(x_C)$, sostituendo quindi i valori di x_C, $f(x_C)$ ed $f'(x_C)$ nell'equazione si ottiene la retta

$$y = \frac{9\sqrt{2}\left(3\sqrt{3}-5\right) - \left(\sqrt{3}-3\right)\sqrt{2\sqrt{3}-3}\,x}{6^{3/4}\sqrt{2-\sqrt{3}}\left(2\sqrt{3}-3\right)^{5/4}},$$

disegnata in rosso in figura.

Esercizio 2. Calcolare le primitive del seguente integrale

$$I = \int \frac{\sqrt{3 + \tan x}}{\cos^2 x}\, dx$$

Soluzione. Per quanto riguarda l'integrale assegnato, per poter calcolarne le primitive, il metodo che scegliamo è quello della sostituzione. Dopo vari tentativi si trova che una sostituzione corretta è la seguente:

$$t = 3 + \tan x.$$

In tal caso si ha

$$t' = \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}(3 + \tan x) = \frac{1}{\cos^2 x},$$

da cui

$$dt = \frac{1}{\cos^2 x}\, dx.$$

Notiamo che nell'integrale assegnato compare il termine $1/\cos^2 x$, quindi, effettuata la sostituzione appena descritta, si arriva a

$$I = \int \sqrt{t}\, dt = \int t^{\frac{1}{2}}\, dt.$$

Di quest'ultimo integrale conosciamo le primitive, che sono

$$\frac{2}{3}\, t^{\frac{3}{2}} + c,$$

sostituendo quindi a t la corrispettiva espressione in x, si ottiene la soluzione cercata:

$$I = \frac{2}{3}\, \sqrt{(3 + \tan x)^3} + c.$$

Esercizio 3. Calcolare le primitive del seguente integrale

$$I = \int \frac{1}{\sin x}\, dx.$$

Soluzione. Anche questo integrale proviamo a risolverlo con il metodo della sostituzione. In particolare, grazie alla formula di duplicazione del seno (che si *deve* sapere), si ha

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Nel nostro caso evidentemente $\alpha = x/2$, quindi possiamo riscrivere il denominatore come $2 \sin (x/2) \cos (x/2)$. L'integrale assegnato si riduce quindi a

$$I = \int \frac{1}{2 \sin (x/2) \cos (x/2)}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sin (x/2) \cos (x/2)}\, dx.$$

Vogliamo ora spezzare l'integranda in una somma di frazioni più semplici, di cui possibilmente conosciamo le primitive. Per far ciò poniamo

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{f(x)}{\sin (x/2)} + \frac{g(x)}{\cos (x/2)}\, dx,$$

cioè

$$\frac{f(x)\cos(x/2)+g(x)\sin(x/2)}{\sin(x/2)\cos(x/2)}=\frac{1}{\sin(x/2)\cos(x/2)},$$

da cui si ricava $f(x)=\cos(x/2)$ e $g(x)=\sin(x/2)$. Ora, per evitare di portarci dietro ulteriormente il termine $x/2$, operiamo la sostituzione $t=x/2$, facendo attenzione al fatto che $dt=dx/2$. Si ottiene

$$I=\int \frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}+\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)}\,\frac{dx}{2}=\int \frac{\cos t}{\sin t}+\frac{\sin t}{\cos t}\,dt.$$

Ecco quindi che, per la proprietà di *linearità* dell'integrale, possiamo ridurre l'integrale da cui siamo partiti a

$$\begin{aligned} I&=\int \frac{\cos t}{\sin t}\,dt+\int \frac{\sin t}{\cos t}\,dt=\int \frac{\cos t}{\sin t}\,dt-\int \frac{-\sin t}{\cos t}\,dt\\ &=\log|\sin t|-\log|\cos t|+c=\log\left|\frac{\sin t}{\cos t}\right|+c, \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza deriva dalla ben nota proprietà del logaritmo

$$\log\left(\frac{a}{b}\right)=\log a-\log b.$$

Sostituendo quindi a t la corrispettiva espressione in x, si ottiene la soluzione cercata:

$$I=\log\left|\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)}\right|+c=\log\left|\tan(x/2)\right|+c.$$

Esercizio 4. Calcolare le primitive del seguente integrale

$$I=\int \frac{1}{\cos x}\,dx.$$

Soluzione. Per risolvere questo esercizio sono possibili *almeno* due strade:

- se si conoscono le primitive di

  $$\int \frac{1}{\sin x}\,dx,$$

  allora, dalla considerazione che $\cos x=\sin(\pi/2-x)$, detto $t=\pi/2-x$, si ha $dt=-dx$ e quindi

  $$I=\int \frac{1}{\cos x}\,dx=\int \frac{1}{\sin(\pi/2-x)}dx=-\int \frac{1}{\sin t}dt.$$

  Come visto nel precedente esercizio, le primitive dell'ultimo integrale sono

  $$\log\left|\tan(t/2)\right|+c=\log\left|\tan(\pi/4+x/2)\right|+c,$$

  quindi, ricordandosi della sostituzione fatta, si conclude che

  $$I=-\log\left|\tan(\pi/4+x/2)\right|+c.$$

Infine, ricordando le formule di addizione del seno e coseno

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

si può riscrivere la soluzione nella forma alternativa

$$\begin{aligned} I &= -\log\left|\frac{\sin(\pi/4)\cos(x/2)+\cos(\pi/4)\sin(x/2)}{\cos(\pi/4)\cos(x/2)-\sin(\pi/4)\sin(x/2)}\right| + c \\ &= -\log\left|\frac{\sqrt{2}/2\,\cos(x/2)+\sqrt{2}/2\,\sin(x/2)}{\sqrt{2}/2\,\cos(x/2)-\sqrt{2}/2\,\sin(x/2)}\right| + c \\ &= -\log\left|\frac{\cos(x/2)+\sin(x/2)}{\cos(x/2)-\sin(x/2)}\right| + c. \end{aligned}$$

- se invece non si conoscono le primitive dell'integrale del precedente esercizio, dobbiamo procedere con il metodo della sostituzione. In particolare, grazie alla formula di duplicazione del coseno, si ha

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha.$$

Se non si ricorda la formula precedente, la si può ricavare a partire dall'identità fondamentale

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1.$$

Scelto infatti $\beta = 2\alpha$, si ottiene

$$\begin{aligned} \cos^2(2\alpha) &= 1 - \sin^2(2\alpha) = 1 - (2\sin\alpha\cos\alpha)^2 \\ &= 1 - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - 4\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha) \\ &= 1 - 4\sin^2\alpha + 4\sin^4\alpha = (1-2\sin^2\alpha)^2, \end{aligned}$$

che è l'identità cercata. Nell'integrale assegnato si ha $\alpha = x/2$, quindi

$$I = \int \frac{1}{1-2\sin^2(x/2)}\,dx.$$

Grazie alla sostituzione $t = x/2$, $dt = dx/2$, possiamo scrivere

$$I = 2\int \frac{1}{1-2\sin^2 t}\,dt = 2\int \frac{1}{\cos^2 t + \sin^2 t - 2\sin^2 t}\,dt = 2\int \frac{1}{\cos^2 t - \sin^2 t}\,dt.$$

Dividendo ora per $\cos^2 t$ sia in numeratore che il denominatore dell'integranda si ha

$$I = 2\int \frac{1/\cos^2 t}{1-\sin^2 t/\cos^2 t}\,dt = 2\int \frac{1}{1-\tan^2 t}\frac{1}{\cos^2 t}\,dt.$$

Sia ora $u = \tan t$, quindi $du = dt/\cos^2 t$ e

$$\begin{aligned} I &= 2\int \frac{1}{1-u^2}\,du = 2\int \frac{1}{(1+u)(1-u)}\,du \\ &= 2\int \frac{1/2}{1+u} + \frac{1/2}{1-u}\,du = \int \frac{1}{1+u} - \frac{-1}{1-u}\,du \\ &= \log|1+u| - \log|1-u| + c = \log\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + c. \end{aligned}$$

Sostituendo quindi prima a u la corrispettiva espressione in t, e poi a t la corrispettiva espressione in x, si ottiene la soluzione cercata:

$$I = \log \left| \frac{1 + \tan(x/2)}{1 - \tan(x/2)} \right| + c = \log \left| \frac{\cos(x/2) + \sin(x/2)}{\cos(x/2) - \sin(x/2)} \right| + c.$$