



ANALISI VETTORIALE

TOPOLOGIA E GEOMETRIA
DIFFERENZIALE a.a. 2009/10
Prof. M. Spica **A2**

Lavoriamo su $U \subset \mathbb{R}^3$ una regione

(aperta, connessa)

Consideriamo un campo vettoriale ($\mathbb{R}^3$)

$$F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$F(x, y, z) = F_1 \underline{i} + F_2 \underline{j} + F_3 \underline{k}$$

$$= (F_1, F_2, F_3)$$

La divergenza di F

è la funzione ($\mathbb{R}^3$) $\text{div } F : U \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{div } F(x, y, z) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

il rotore di F è il campo vettoriale ($\mathbb{R}^3$)

$$\text{curl } F \text{ (o } \text{rot } F) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

(curl = riciccolo)

$$\text{curl } F = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{i} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) + \underline{j} \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) + \underline{k} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

★ ricordiamo che il gradiente di $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $(\mathbb{R}^n)$, è il campo vettoriale $(\mathbb{R}^n)$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \underline{k}$$

Formule, (ma l'analogia è fuorviante!)

$$\operatorname{div} F = \langle \nabla, F \rangle \quad \nabla \text{ (matr.)}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\operatorname{curl} F = \nabla \times F$$

Si trova facilmente che

★

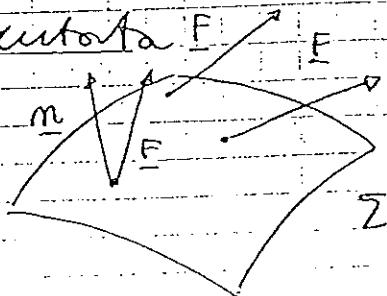
- 1) $\operatorname{div} (\operatorname{curl} F) = 0$
- 2) $\operatorname{curl} (\nabla f) = 0$

ovvero

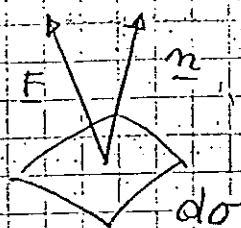
$$\operatorname{div} (\nabla f) = \dots = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$= \Delta f \quad (\Delta = \text{Laplaciano})$$

★ Flusso di un campo vettoriale F
 attraverso una superficie (regolare)
 orientata



$$\Phi = \iint_{\Sigma} \langle \underline{F} | \underline{n} \rangle d\sigma$$



$$d\Phi = \langle \underline{F} | \underline{n} \rangle d\sigma$$

$$(\equiv \underline{F} \cdot \underline{n} d\sigma)$$

elemento di
flusso

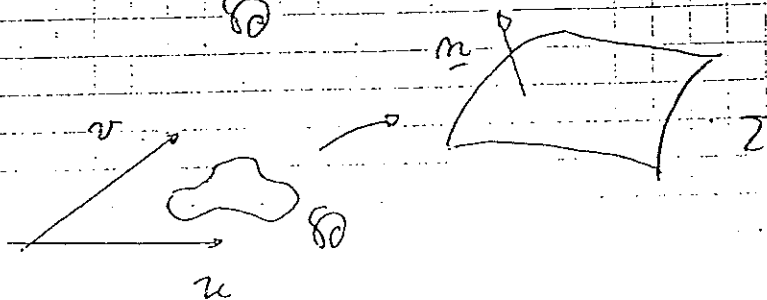
$$\Phi \rightarrow -\Phi \quad \text{se} \quad \underline{n} \rightarrow -\underline{n}$$

1. ed è invariante per riparametrizzazioni
di Σ che non cambiano l'orientamento

[Se $\underline{F} = \underline{v}$: campo di velocità di un
fluido, $d\Phi$ è la quantità di fluido
che passa attraverso $d\sigma$ nell'unità di tempo
 Φ è la quantità di fluido che attraversa
 Σ (positiva o negativa...)]

Assumiamo poi di tagliare la
formula per Φ .

$$\iint_{\Sigma} \langle \underline{F} | \underline{n} \rangle d\sigma = \iint_{\partial\Omega} \langle \underline{F} | \underline{r}_u \times \underline{r}_v \rangle du dv =$$



$$= \iint_{\mathcal{S}} \det(\underline{F}, \underline{r}_u, \underline{r}_v) \, du \, dv$$

$$= \iint_{\mathcal{S}} \left\{ F_1 \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + F_2 \frac{\partial(z, u)}{\partial(u, v)} + F_3 \frac{\partial(u, y)}{\partial(u, v)} \right\} du \, dv$$

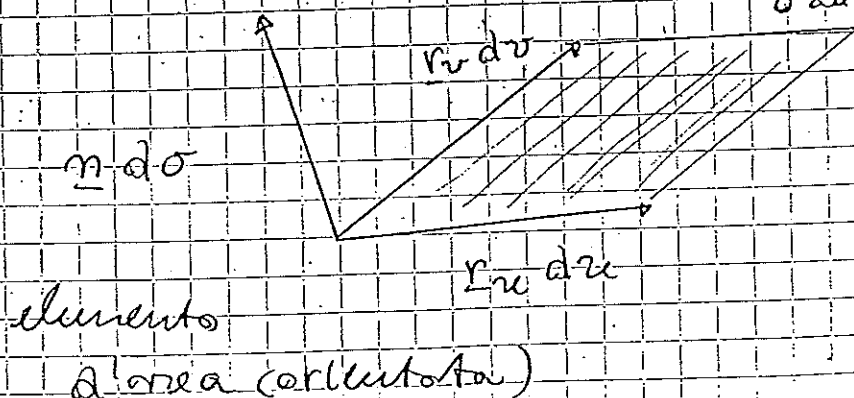
$\equiv$ (in analogia con il caso bidimensionale...)

$$\iint_{\Sigma} F_1 \, dy \wedge dz + F_2 \, dz \wedge du + F_3 \, du \wedge dy$$

2-forma

||| (Definita non "intrinsecamente", ma attraverso un'integrazione... ma si può operare come per le 1-forme...)

★ 2-forma $\equiv$ elemento di flusso
(1-forma $\equiv$ elemento di lavoro)
o circuitalità

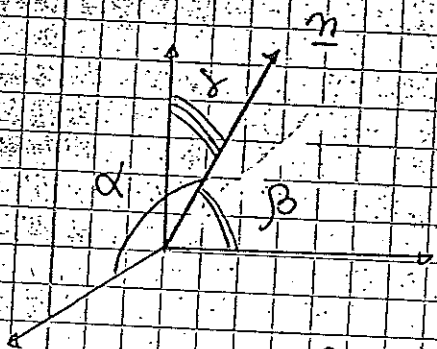


$$dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy$$

$\star$ possono essere pensate come aree dei parallelogrammi rappresentati ottenuti proiettando il parallelogramma precedente sui piani coordinati o, equivalentemente, le componenti di $\underline{n}$ d σ .

$\star$ un'altra espressione per Φ si ottiene

utilizzando i coseni direttori della retta (per l'origine) determinata da $\underline{n}$



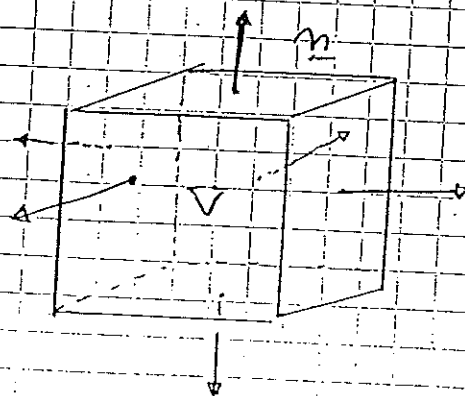
$$\underline{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

$$(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1)$$

$$\Phi = \iint_{\Sigma} (F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta + F_3 \cos \gamma) d\sigma$$

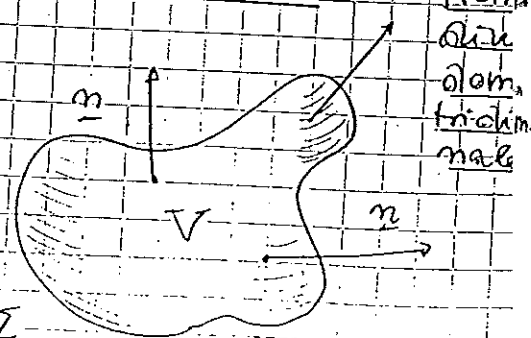
$\star$ Consideriamo una superficie chiusa generalmente regolare

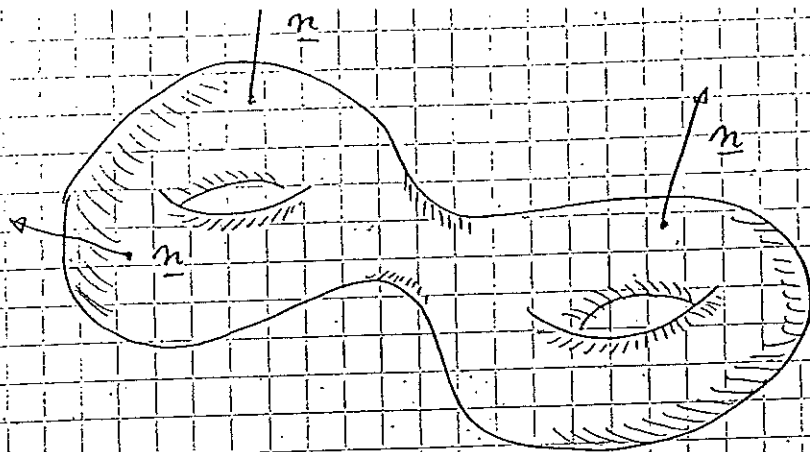
$\Gamma \subset \Sigma$



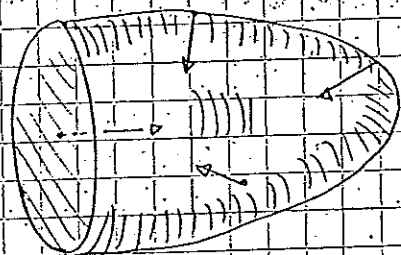
$$\partial V = \Gamma$$

orientabile





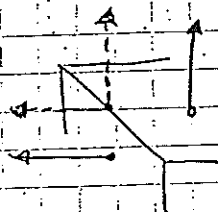
or. secondo la
normale
esterna



orientamento secondo
la normale interna

⚡ Distinguo tra or. secondo la normale
interna ($\equiv \underline{n_i}$) o esterna ($\underline{n_e}$)

Per una superficie qualitativamente regolare
la normale è discontinua lungo curve,
in generale.



⇒ si ritengono funzioni locali
discontinue su un insieme
di misura nulla.

★ Teorema della divergenza (di Gauss)

Sia V un dominio misurabile in $\mathbb{R}^3$, limitato
 Sia $\Gamma = \partial V$ (frontiera di V)

(generalmente) regolare, orientata secondo la norma
 esterna n_e .

Sia F un campo vettoriale ($\mathbb{R}^3$, ma potrebbe
 dipendere su un spazio $\mathbb{R}^n$).

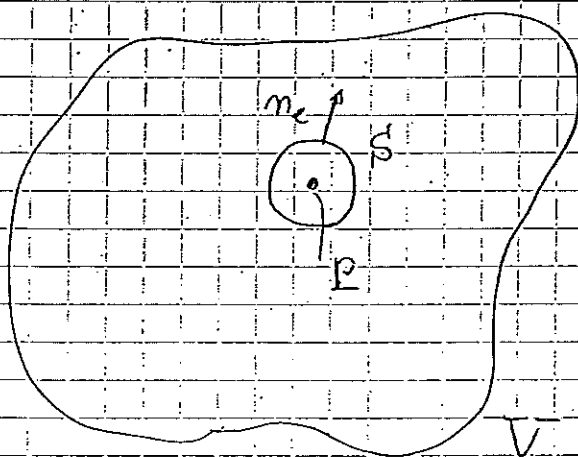
Allora

$$\iint_{\partial V} \langle F | n_e \rangle d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} F \, d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3$$



Idea originaria (Gauss)

Sia $p \in V$ consideriamo una sfera
 (contenuta in V) S di centro P con



in $V \subset \mathbb{R}^3$. Sia V
 il dominio da questa
 circonferenza.

Gauss ha definito

$$\operatorname{div} F(P) := \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\iint_S F \cdot n_e}{\operatorname{mes}(S)}$$

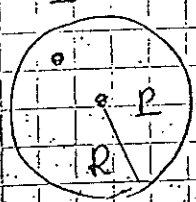
(R = raggio di S)

e ha trovato l'espressione data per $\operatorname{div} F$.

Conoscendo il teorema della divergenza

Si ha

$$\frac{\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma}{m(V_S)} = \frac{\iiint_{V_S} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz}{m(V_S)}$$

$$\frac{\oint_{\partial V_S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma}{m(V_S)} = \frac{\operatorname{div} \mathbf{F}(\bar{P}) \cdot m(V_S)}{m(V_S)} = \operatorname{div} \mathbf{F}(\bar{P}) \rightarrow \operatorname{div} \mathbf{F}(\bar{P})$$


Se $R \rightarrow 0$, ottenendo un'interpretazione "infinitesimale" di $\operatorname{div} \mathbf{F}$.

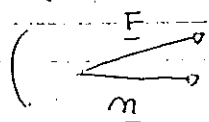
★ Fisicamente, $\operatorname{div} \mathbf{F}(\bar{P})$ misura, per esempio, la quantità di fluido creata ($\operatorname{div} > 0$) o distinta (< 0) in $\bar{P}$.

es: in elettrostatica densità di carica
 $\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho$

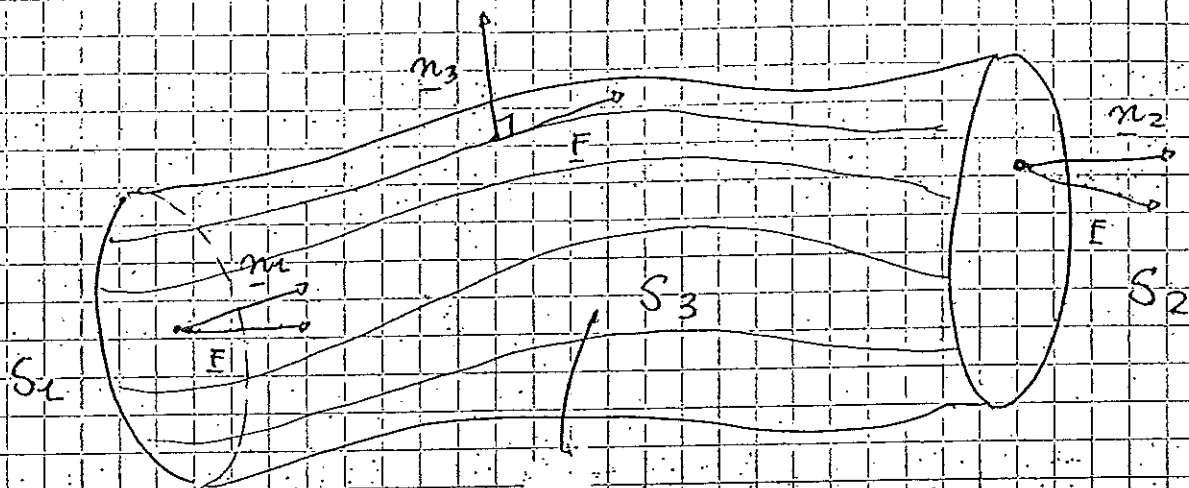
★ Se $\operatorname{div} \mathbf{F} \equiv 0$ $\mathbf{F}$ si dice solenoidale (es. il campo magnetico; non esistono poli magnetici isolati).

Consideriamo le linee di forza di un tale campo (linee tangenti a ogni punto al campo ...) e un tubo di flusso.

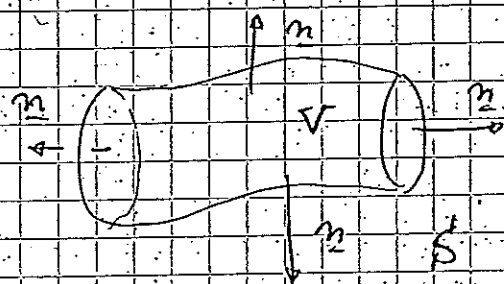
Prendiamo come basi due superficie S_1 e S_2 (regolari) orientate nella direzione del campo.



($\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} > 0$) . Allora i flussi di $\mathbf{F}$ attraverso S_1 e S_2 sono uguali.



consideriamo la sup chiusa $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$
orientata secondo la normale esterna



Si ha

$$\iint_S \underline{F} \cdot \underline{n} \, d\sigma = - \iint_{S_1} \underline{F} \cdot \underline{n}_1 \, d\sigma + \iint_{S_2} \underline{F} \cdot \underline{n}_2 \, d\sigma$$

$$\iiint_V \operatorname{div} \underline{F} \, d\tau = \iint_{S_3} \underline{F} \cdot \underline{n}_3 \, d\sigma$$

$$\Rightarrow \Phi_1 = \Phi_2$$

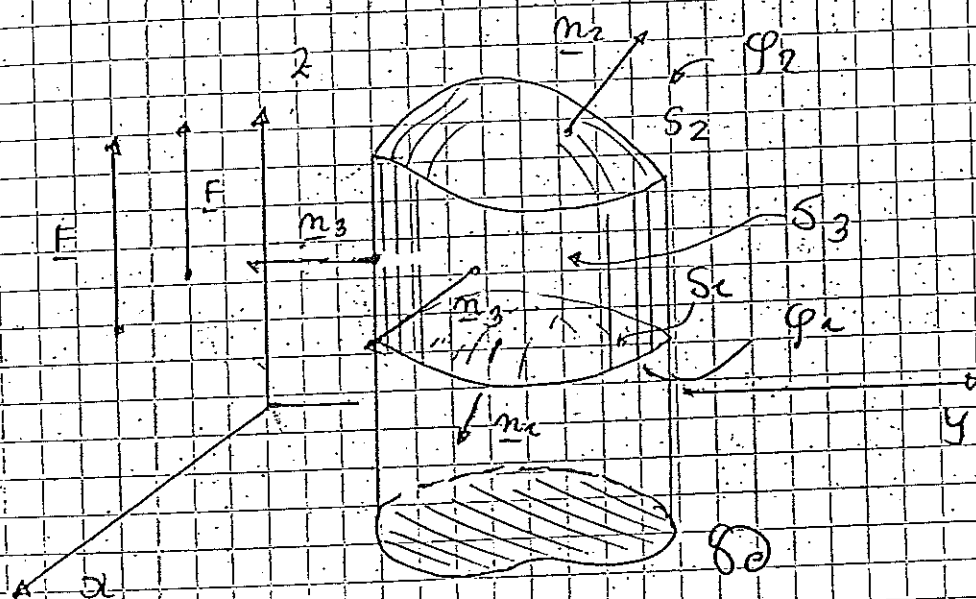
★ Dimostrazione del teorema della divergenza

consideriamo il seguente caso particolare

★ $F = (P, Q, R)$ con $P = Q = 0$

$\Rightarrow F = (0, 0, R)$

$V =$ dominio normale rispetto al piano (x, y)



(con le notazioni)

si ha

$$\boxed{\iiint_V \operatorname{div} F \, dv = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} \, dx \, dy \, dz =}$$

$$= \iint_{\Omega} dx \, dy \left(\int_{\phi_1(x, y)}^{\phi_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} (x, y, z) \, dz \right) =$$

$$= \iint_{\Omega} [R(x, y, \phi_2(x, y)) - R(x, y, \phi_1(x, y))] \, dx$$

Inoltre

$$\iint_S \underline{E} \cdot \underline{n} \, d\sigma = \iint_{S_1} \underline{E} \cdot \underline{n}_1 \, d\sigma + \iint_{S_2} \underline{E} \cdot \underline{n}_2 \, d\sigma + \iint_{S_3} \underline{E} \cdot \underline{n}_3 \, d\sigma$$

" 0

ora S_1 :

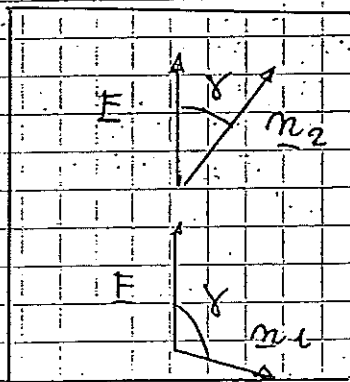
$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = \varphi_1(x, y) \end{cases}$$

★ tale per da l'orientamento opposto a quello indicato.

S_2 :

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = \varphi_2(x, y) \end{cases}$$

★ (orientamento corretto)



[calcolare $\underline{r}_x \times \underline{r}_y$... la terza componente è > 0.

Prima

$$\iint_{S_1} R \cos \gamma \, d\sigma + \iint_{S_2} R \cos \gamma \, d\sigma$$

$$\iint_S \underline{E} \cdot \underline{n} \, d\sigma = \iint_{S_1} R \, dx \, dy + \iint_{S_2} R \, dx \, dy$$

$$(u, v) = \begin{cases} (y, x) \\ (x, y) \end{cases}$$

=>

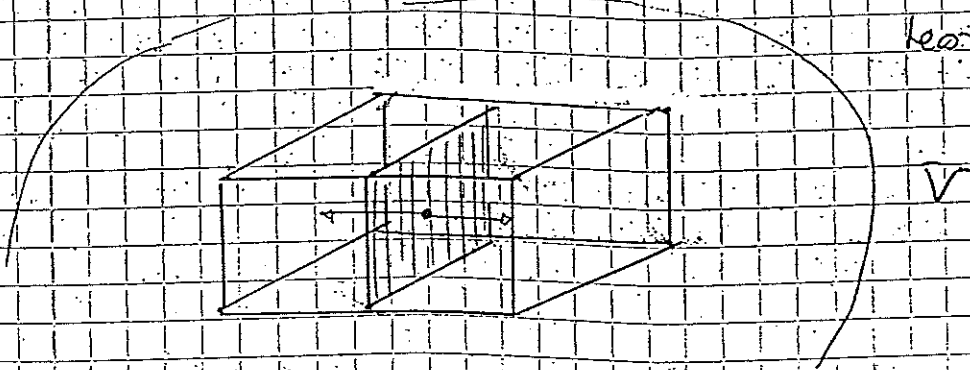
$$= - \iint_{S_1} R(x, y, \varphi_1(x, y)) \, dx \, dy + \iint_{S_2} R(x, y, \varphi_2(x, y)) \, dx \, dy$$

$\Rightarrow$ si ha l'assunto

Analoghe considerazioni provano il teorema per dom. normali rispetto agli altri piani

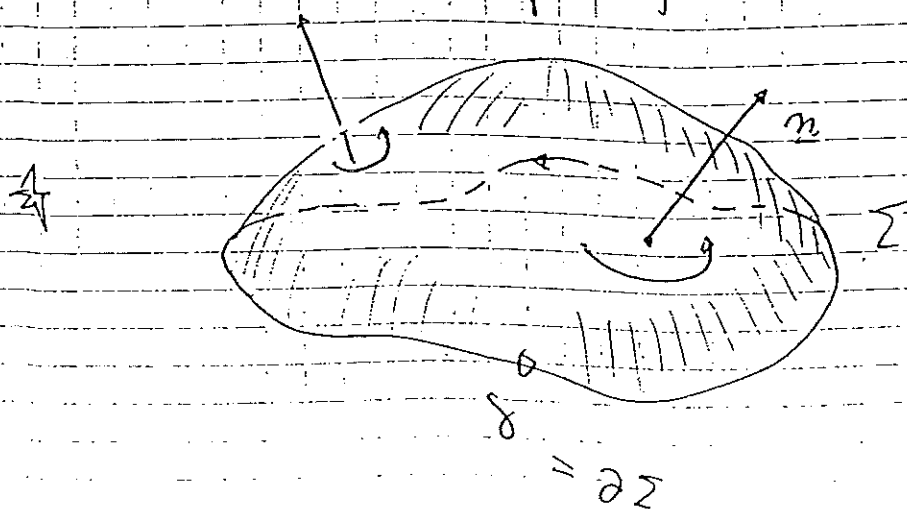
$\Rightarrow$ si ha l'assunto per domini normali rispetto ai tre piani coordinati.

★ In generale (in analogia con il caso bidimensionale) si divide il dominio in sotto domini opportuni, normali rispetto ai tre piani coordinati, e si applica a questi il teorema.

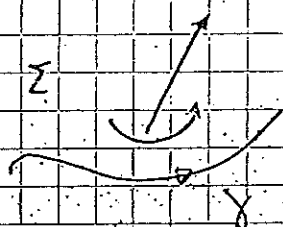


★ Gli integrali di volume si sommano, gli integrali superficiali lungo le frontiere "interne" si cancellano a due a due...

$\Rightarrow$ l'esito segue facilmente.



l'orientamento di
una superficie regolare Σ induce in
modo naturale un orientamento della frontiera
 $\gamma = \partial \Sigma$



Posto Σ^+ , γ^+ per
denotare questa relazione

univoca, si
dimostrano, il

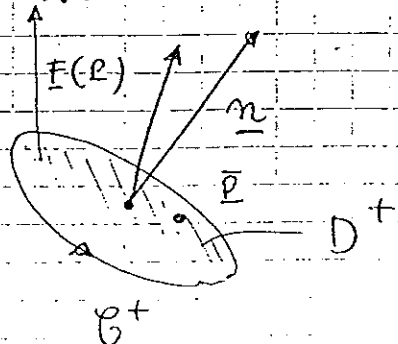
★ Teorema di Stokes (o della circolazione)
(con le notazioni e le ipotesi precedenti.)

$\iint_{\Sigma^+} \text{curl } \underline{F} \cdot \underline{n} \, d\sigma = \int_{\gamma^+} \underline{F} \cdot d\underline{r}$
flusso del rotore " circulazione

★ Interpretazione fisica del rotore

Sia $\underline{F}$ il campo di velocità di un fluido.

Sia D^+ un dischetto orientato di raggio R
centrato in un punto P , e sia ∂^+ la
sua frontiera munita dell'orientamento
indotto.



Curl $\underline{F}$ è, in
questo caso, detto
(campo di)
vorticità del fluido

Applicando il teorema di Stokes e il
teorema della media integrale, si trova

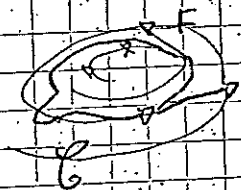
$$\frac{\int_{D^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{m(D^+)} = \langle \text{curl } \mathbf{F}(\mathbf{p}) \mid \underline{n} \rangle$$

Che, se $R \rightarrow 0$, tende a

$$\langle \text{curl } \mathbf{F}(\mathbf{p}) \mid \underline{n} \rangle$$

$\Rightarrow$ variando $\underline{n}$ (il dischetto) ricostruisco

$\text{curl } \mathbf{F}$



È chiaro il significato
del termine vorticità...

★ Interpretazione in termini di
forme differenziali

Sia U regione $\subset \mathbb{R}^3$

$\Lambda^0(U)$: - forme diff.
(funzioni)

$\Lambda^1(U)$: 1- forme differenziali

$$\omega = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

$\Lambda^2(U)$: 2- forme differenziali

$$\omega = F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy$$

$$\Lambda^3(\mathbb{R}^3) = 3\text{-forme diff.}$$

$$\omega = \int f(x, y, z) dx \wedge dy \wedge dz$$

formalmente $dx \wedge dy \wedge dz = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} du dv dw$

(è l'elemento di volume orientato)

Definiamo (cf. il caso di $\mathbb{R}^2$)

$$d: \Lambda^1(\mathbb{R}^3) \rightarrow \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$$

in modo "naturale"

$$d\omega = d(F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz) :=$$

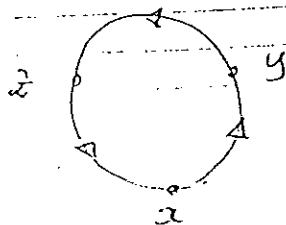
$$dF_1 \wedge dx + dF_2 \wedge dy + dF_3 \wedge dz$$

$$= \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} dx + \frac{\partial F_1}{\partial y} dy + \frac{\partial F_1}{\partial z} dz \right) \wedge dx +$$

termini analoghi

$$= \frac{\partial F_1}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial F_1}{\partial z} dz \wedge dx + \text{termini analoghi}$$

$$= - \frac{\partial F_1}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial F_1}{\partial z} dz \wedge dx + \text{termini analoghi}$$



In definitiva

$$d\omega = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) dy \wedge dz +$$

$$+ \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) dz \wedge dx$$

$$+ \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

Si chiama $\text{Curl } F$!

$$(F = (F_1, F_2, F_3))$$

Si ha ora

$$d: \Lambda^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow \Lambda^3(\mathbb{R}^3)$$

così definito: $\omega = F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy$

$$d(F_1 dy \wedge dz + \dots + \dots)$$

$$= dF_1 \wedge dy \wedge dz + \dots =$$

$$= \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} dx + \frac{\partial F_1}{\partial y} dy + \frac{\partial F_1}{\partial z} dz \right) \wedge dy \wedge dz + \dots$$

$$= \frac{\partial F_1}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \dots$$

In definitiva

$$d\omega = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

||

$$\operatorname{div} F \quad (\text{se } F = (F_1, F_2, F_3))$$

Si constata poi che, in tutti i casi

★

$$d^2 = 0$$

Tale formula compendia le formule

$$\operatorname{curl}(\nabla f) = 0$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{curl} F) = 0$$

$$\left[\Lambda^0(\mathcal{U}) \xrightarrow{d} \Lambda^1(\mathcal{U}) \xrightarrow{d} \Lambda^2(\mathcal{U}) \xrightarrow{d} \Lambda^3(\mathcal{U}) \xrightarrow{d} 0 \right]$$

★

Dicesi: complesso di de Rham

$$(d^2 = 0)$$

(non a caso
4 forme
in $\mathbb{R}^3$)

★

Teorema di Stokes generalizzato

In tutti i casi

$$\int_{\partial D^+} \omega = \int_{D^+} d\omega$$

ω : k -forma

dominio...

D^+ : $k+1$ -dimensione

Tale teoria si assume i teoremi
precedenti (Green, Gauss, Stokes.)

[★] In $\mathbb{R}^3$ si è visto come sia possibile

esprimere i campi vettoriali con

1-forme o con 2-forme

★ per esempio, il campo di velocità $\mathbf{v}$ di un
fluido può essere associato ad una 1-forma

→ Def. la circolazione $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$

oppure ad una 2-forma

⇒ Def. il flusso $\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$

La giustificazione di tale fatto si ottiene

osservando che in $\mathbb{R}^3$,

★ l'operatore $*$ (Star) di Hodge (+)

trasforma 1-forme in 2-forme

e viceversa

$*$: $dx \rightarrow dy \wedge dz$

$dy \rightarrow dz \wedge dx$

$dz \rightarrow dx \wedge dy$

$*$: $dy \wedge dz \rightarrow dx$

(+) in generale $*$: $\Lambda^k \rightarrow \Lambda^{n-k}$

se n = dim della "varietà"

★ Definiamo in $U \subset \mathbb{R}^3$ (U : regione)

($R = 0, 1, 2, 3$)

Def: $\omega \in \Lambda^R(U)$ è detta chiusa se

$$d\omega = 0.$$

(qui $R \geq 1$) ω è detta esatta se

$$\omega = da, \quad a \in \Lambda^{R-1}(U)$$

Ovviamente ω esatta $\Rightarrow \omega$ chiusa

$$(d^2 = 0)$$

★ Osservazioni

Se $\omega \in \Lambda^0(U)$, $\omega = f$ (funzione)

e $df = 0 \Rightarrow f$ costante

★ In termini di campi vettoriali

• $\omega \in \Lambda^1(U)$ è chiusa

$\Leftrightarrow \text{curl } \underline{E} = 0$ ($\underline{E}$ irrotazionale)

• $\omega \in \Lambda^1(U)$ è esatta

$\Leftrightarrow \underline{E} = \nabla f$ ($\underline{E}$ conservativo)

• $\omega \in \Lambda^2(U)$ è chiusa

$\Leftrightarrow \text{div } \underline{E} = 0$ ($\underline{E}$ solenoidale)

• $\omega \in \Lambda^2(U)$ è esatta

$\Leftrightarrow \underline{E} = \text{curl } \underline{A}$ ($\underline{a} \leftrightarrow (A_1, A_2, A_3)$)

• $\omega \in \Lambda^3(\mathcal{U})$ è sempre chiusa

• $\omega = \int dx \wedge dy \wedge dz$ e

isotta se $\omega = da$

$\Leftrightarrow f = \text{div } A$

(sempre verificata per una opp. scelta di A)

$\omega \in \Lambda^3(\mathcal{U})$ è sempre isotta

4. Ponle 1-forme continue a valore

il teorema di Poincaré:

Se $\mathcal{U}$ è semplicemente connesso, (*) allora

$\omega \in \Lambda^1(\mathcal{U})$ è chiusa $\Leftrightarrow \omega$ è isotta.

(In ogni caso ω chiusa $\Rightarrow \omega$ loc. isotta)

(*) Def. analoga a quella per regioni piane...

In generale si introducono

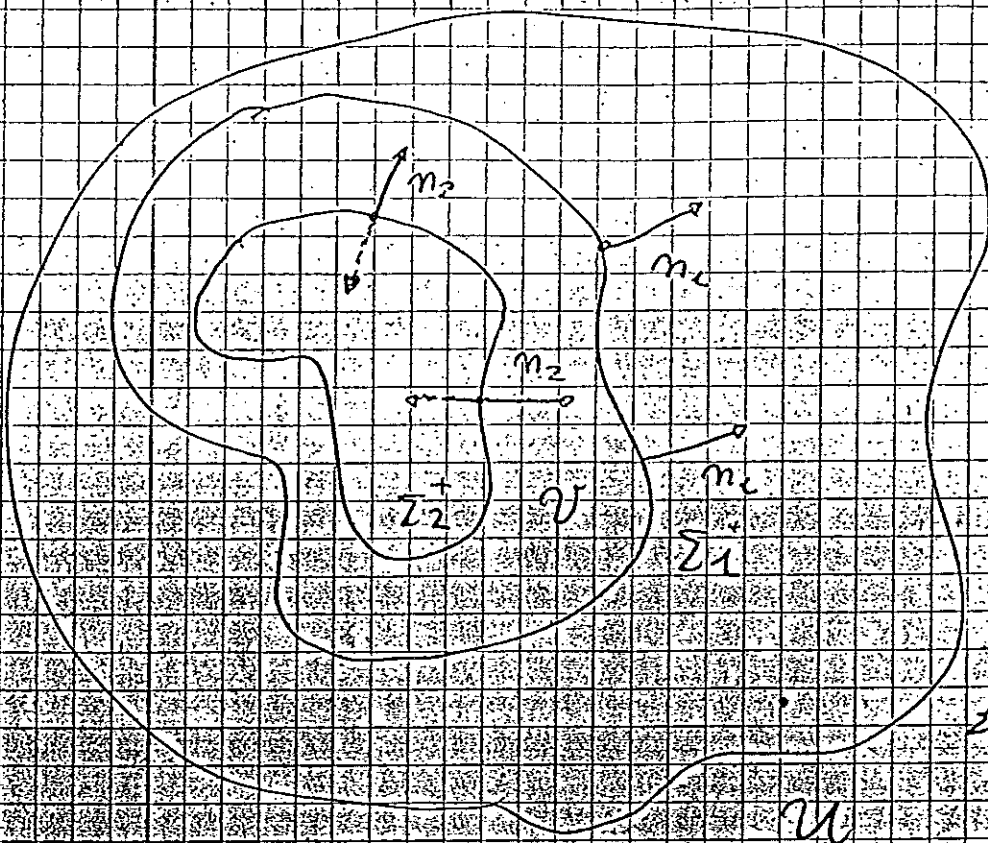
"gruppi di omologia"

in omologia al caso piano...

ex: Σ_1^+, Σ_2^+ superficie chiuse: $\partial \Sigma_i = \emptyset$
Si dicono omologhe

se $\Sigma_1^+ \cup \Sigma_2^-$ è frontiera di un dominio

$\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ si scrive $\Sigma_1 \sim \Sigma_2$

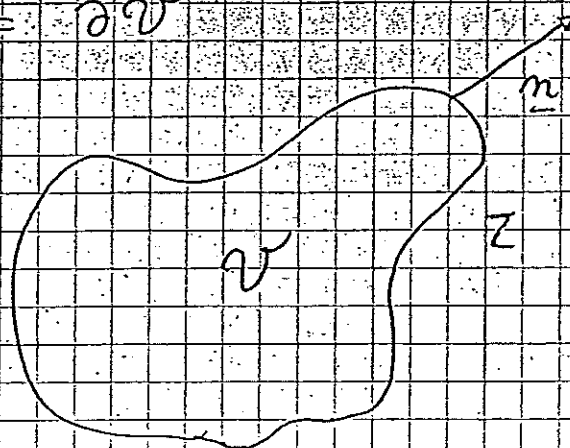


★ Si definisce
in modo
naturale
un operatore

$\mathcal{Z}$ si dice "omologa a 0"

∂
Cap. di bordo

$$\text{se } \mathcal{Z} = \partial V$$



★ In generale
si ha

$$\partial^2 = 0$$

★ Si può fare vedere che $\omega \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$

è soleno $\Leftrightarrow \int_{\mathcal{Z}} \omega = 0 \quad \forall \mathcal{Z} \text{ chiusa c.c.}$

Teorema (analogo del teor. di Poincaré)

Sia U tale che ogni $\gamma \subset U$ chiusa

sia "omologa a 0". Allora ogni 2-forma

chiusa è esatta. In ogni caso ω chiusa è localmente esatta

Dim.
$$\iint_{\Sigma} \omega = \int_{\partial \Sigma} \omega = \int_{\partial \Sigma} d\omega = 0$$

Per il risultato precedente ω è esatta $\square$

[Si generalizzano anche i gruppi di omotopia

numero superficie chiuse al posto di curve...]

Due k -forme ω_1, ω_2 chiusse
 si dicono coomologhe se $\omega_1 - \omega_2 = da$
 a $a \in \wedge^{k-1}(U)$.

dal teorema di Stokes generalizzato si ha
 che, se ω è chiusa

$$\int_D \omega$$

(k -dominio) chiuso

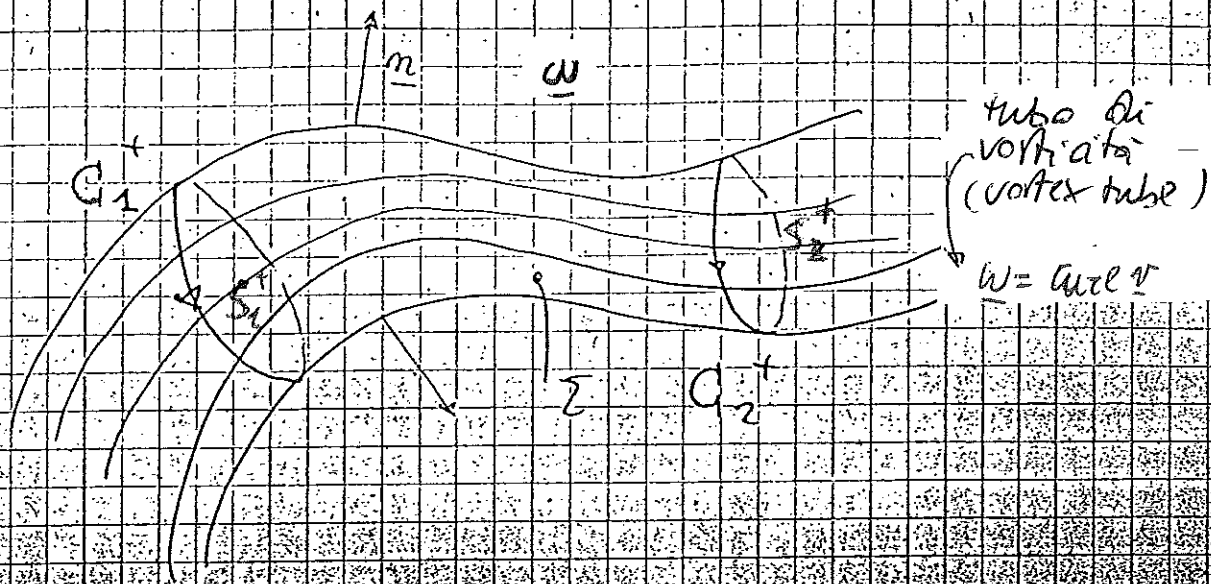
non dipende che da $[\omega]$ e $[D]$

[] Quota la classe di coomologia
o di omologia ...)

Integrando

$$\begin{aligned}
 \int_{D+\partial D} \omega + da &= \int_D \omega + \int_{\partial D} da + \\
 &= \int_D \omega + \int_{\partial D} da + \int_{\partial D} \omega + \int_{\partial D} da = \\
 &= \int_D \omega + \int_{\partial D} a + \int_{\partial D} d\omega + \int_{\partial D} d^2a \\
 &\quad \parallel \quad \parallel \quad \parallel \\
 &\quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 &\quad \left(\int_{\partial D} a \right) \\
 &= \int_D \omega
 \end{aligned}$$

La discurzione sul tubo di flusso
associato ad un campo solenoidale
è compresa da queste condizioni,
come pone la seguente.



Allora

con riferimento alla figura

$$\int_{C_1^+} v \cdot dr = \int_{C_2^+} v \cdot dr$$

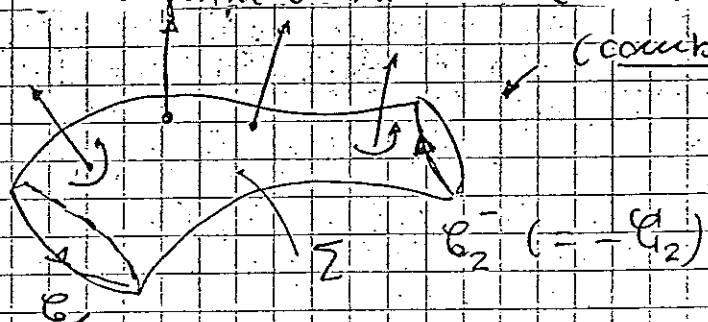
teorema di
★ Helmholtz

vorticità (strength)
del tubo di vorticità

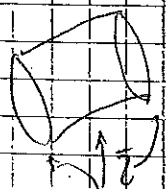
Dire

Immediata dal teorema di
divergenza e dal teorema di Stokes

(conviene l'orientamento)



$$\int_{\Sigma} w = \int_{\partial \Sigma} dw = 0$$



$$\iint_{\Sigma} w \cdot n \cdot d\sigma = \iiint_V \text{div } w \, dv = 0$$

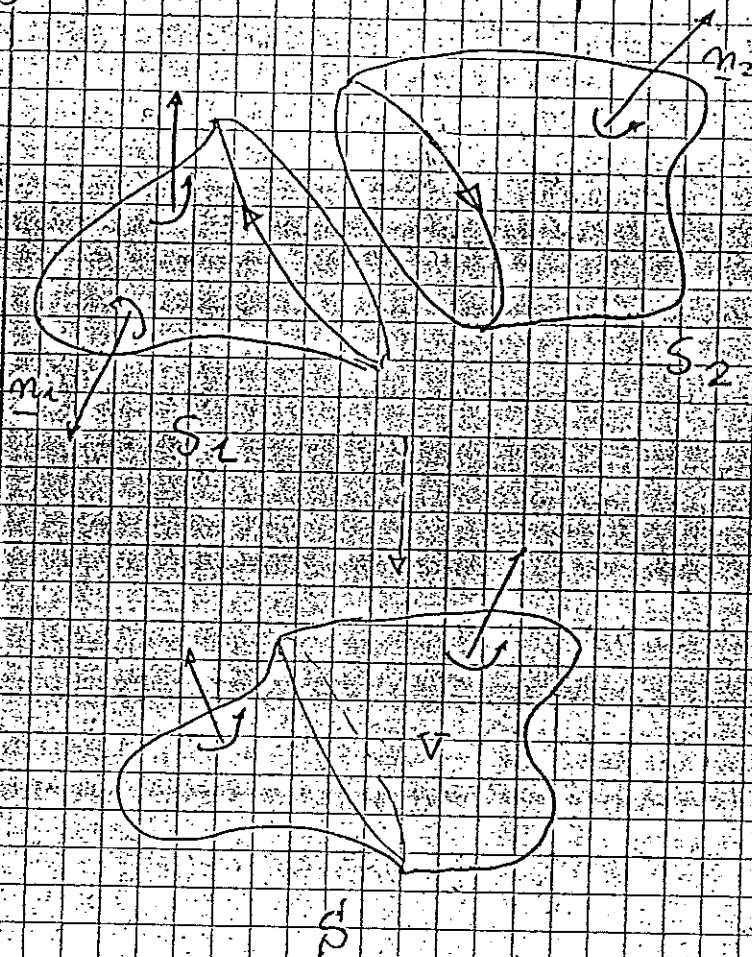
$$\text{div } (\text{curl } w) = 0$$

$$\iint_{\Sigma} w \cdot n \, d\sigma = \int_{C_1} v \cdot dr$$

$$\int_{\Sigma} w = \int_{\partial \Sigma = C_1} v$$

★ utile nelle applicazioni è il
 "metodo del tappabuchi" (*)

(*) Il nome non è ufficiale !!



Si basa sulla formula

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \iint_{S_1} \underline{F} \cdot \underline{n}_1 d\sigma = \iint_S \underline{F} \cdot \underline{n} d\sigma - \iint_{S_2} \underline{F} \cdot \underline{n}_2 d\sigma \\ &= \iiint_V \operatorname{div} \underline{F} d\tau - \Phi_2 \end{aligned}$$

Se Φ_1 è difficile da calcolare ^{esattamente}, e Φ_2 e $\iiint_V \operatorname{div} \underline{F} d\tau$ sono facili (ad es. se $\operatorname{div} \underline{F} = 0$...), si può usare $\diamond$

★ Esempi ed esercizi

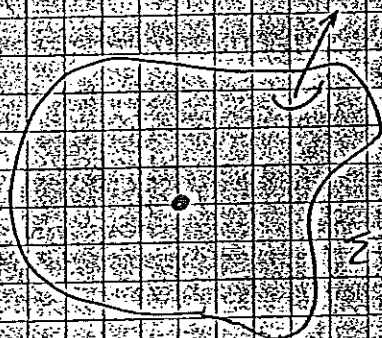
★ Diamo un esempio di 2-forma chiusa non esatta.

$$\text{Sia } U = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$$

U è semplicemente connesso

$\Rightarrow$ ogni 1-forma chiusa è esatta.

★ U contiene sup. chiuse non omologhe a zero



$$\text{Sia } \underline{E} = \frac{n}{\|r\|^3} \quad (\text{campo elettrico gen. da una carica puntiforme posta in } O)$$

$$\underline{E} = (E_1, E_2, E_3)$$

$$E_1 = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad \text{etc.}$$

Consideriamo la 2-forma (ω di flusso) associata ad $\underline{E}$

$$\omega = E_1 dy \wedge dz + E_2 dz \wedge dx + E_3 dx \wedge dy$$

Ora, $\text{div } \underline{E} = 0$ in U , ovvero $d\omega = 0$

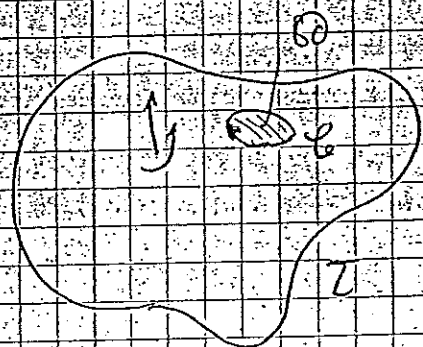
★ Facciamo vedere che ω non è esatta.

Se lo fosse, $\omega = da$ $a \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$

cioè $\underline{E} = \text{curl } A$

★ Dal teorema di Stokes si ottiene
immediatamente che, se Σ è una
superficie Σ chiusa, gl. reg. orientabile
... è orientata

$$\oint_{\Sigma} \text{curl } E \cdot \underline{n} \, d\sigma = 0 \quad \forall E$$



(*) applicando a $\Sigma - \partial$
e passando al limite ...

Dovrebbe allora essere

$$\oint_{\Sigma} \underline{E} \cdot \underline{n} \, d\sigma = 0 \quad \forall \Sigma \text{ chiusa}$$

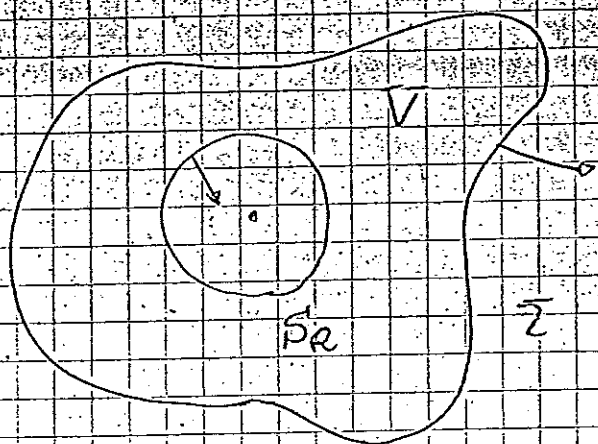
★ ma questo è falso

Sia $\Sigma = S_R$ sup. Sfera di
centro O e raggio R or. secondo
la normale esterna.

Si ha (osservato che $\underline{m} = \frac{\underline{r}}{\|\underline{r}\|} = \frac{\underline{r}}{R}$)

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_{S_R} \underline{E} \cdot \underline{m} \, d\sigma = \\ &= \iint_{S_R} \frac{\|\underline{r}\|^2}{\|\underline{r}\|^4} \, d\sigma = \frac{1}{R^2} \iint_{S_R} d\sigma = \\ &= \frac{1}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi \neq 0!\end{aligned}$$

★ lo stesso risultato vale se Γ è una qualsiasi sup. chiusa gen. reg. $\neq \emptyset$



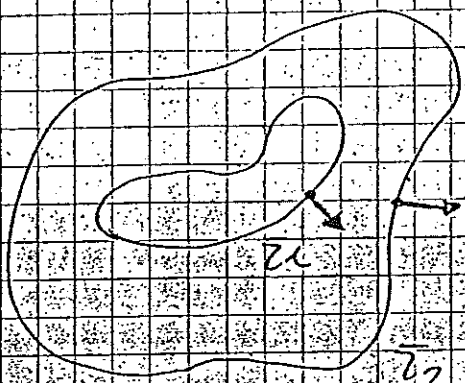
★ basta applicare il teorema della divergenza

e assumere che $\text{div } \underline{E} = 0$ in $V \dots$
Essenzialmente, abbiamo dimostrato il

★ Teorema di Gauss: il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa (or) Γ è proporzionale alla quantità di carica presente nel dominio racchiuso da Γ .

In generale, se $\text{div } \underline{F} = 0$ e,

$$\Phi_1 = \Phi_2$$



Se Φ_1 risultasse differente da colore, si può colore Φ_2 per γ_1 opposta γ_2

★★ "Principio di invarianza di gauge"
caso molto particolare

(H. Weyl)

sia $\mathcal{U}$ connesse
semplice connesse

Sia $\underline{F} = \text{curl } \underline{A}$ Campo $\underline{F}$ è solenoide

$\underline{A}$ non è unico: se $\underline{A}' = \underline{A} + \nabla f$, $\underline{A}'$ è pure

$$\text{se } \underline{F} = \text{curl } \underline{A}'$$

$$\text{curl}(\underline{A} - \underline{A}') = 0$$

$$\Rightarrow \underline{A}' = \underline{A} + \nabla f \quad \text{per una qualche}$$

f

★ Osserva qui che

• F è solenoidale $\Leftrightarrow F = \text{curl } A$ localmente
($\text{div } F = 0$)

• F è irrotazionale $\Leftrightarrow F = \nabla f$ localmente
($\text{curl } F = 0$)

★ Esercizio

1. Sia V il dominio di $\mathbb{R}^3$

delimitato superiormente dal piano

$z = y + \frac{1}{2}$ e inferiormente dal

paraboloidale di equazione $z = x^2 + y^2$

Sia $F = (x, y, z)$ ($= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$)

Determinare il flusso $\Phi = \iint_S F \cdot n \, d\sigma$

dove S è la sup. laterale di V , orientata
come in figura.

