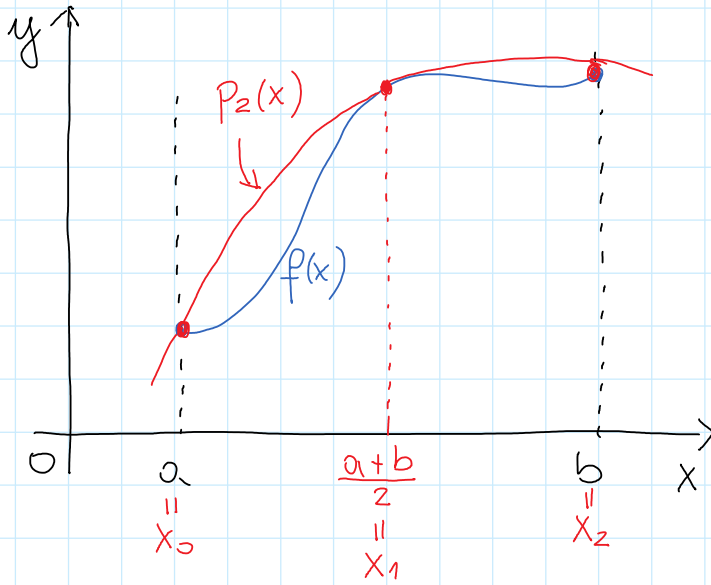


FORMULA DI CAVALIERI - SIMPSON



$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p_2(x) dx = I_{cs}$$

con $p_2(x)$ polinomio di grado $m=2$ che interpola f nei nodi

$$x_0 = a, \quad x_1 = \frac{a+b}{2}, \quad x_2 = b$$

Per trovare le formule che
dà I_{CS} devo fare il
combo. Sia

$$p_2(x) = f(x_0) p_0(x) + f(x_1) p_1(x) + f(x_2) p_2(x)$$

dove $l_0(x)$, $l_1(x)$, $l_2(x)$ sono i polinomi di Lagrange.
Allora

$$\int_a^b p_2(x) dx = \int_a^b [f(x_0)e_0(x) + f(x_1)e_1(x) + f(x_2)e_2(x)] dx =$$
$$= f(x_0) \underbrace{\int_a^b e_0(x) dx}_{\text{"} A_0^{(2)} \text{"}} + f(x_1) \underbrace{\int_a^b e_1(x) dx}_{\text{"} A_1^{(2)} \text{"}} + f(x_2) \underbrace{\int_a^b e_2(x) dx}_{\text{"} A_2^{(2)} \text{"}}$$

Calcolo il primo integrale.

$$\int_a^b \rho(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} dx \quad \uparrow$$

$$x = x_0 + h \Delta$$

$$\text{con } h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1$$

$$= \frac{b-a}{2}$$

$$\left(\Rightarrow \Delta = \frac{x-x_0}{h} ; d\Delta = \frac{1}{h} dx \right)$$

$$2 \int_{-h}^{-2h} ((x_0 + h\Delta - x_1)(x_0 + h\Delta - x_2)) \rho d\Delta -$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^2 \frac{(x_0 + h\Delta - x_1)(x_0 + h\Delta - x_2)}{(-h) \cdot (-2h)} \rho_2 d\Delta = \\
 &= \frac{\cancel{\rho_2}}{2h^2} \int_0^2 (h\Delta - h)(h\Delta - 2h) d\Delta = \\
 &= \frac{1}{2\cancel{h^2}} \int_0^2 h(\Delta - 1)h(\Delta - 2) d\Delta = \\
 &= \frac{h}{2} \int_0^2 (\Delta^2 - 3\Delta + 2) d\Delta = \frac{h}{2} \left[\frac{\Delta^3}{3} - 3\frac{\Delta^2}{2} + 2\Delta \right]_0^2 = \\
 &= \frac{h}{2} \left\{ \left[\frac{2^3}{3} - 3 \cdot \frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 \right] - \left[\frac{0^3}{3} - 3 \cdot \frac{0^2}{2} + 2 \cdot 0 \right] \right\} = \\
 &= \frac{h}{2} \left\{ \frac{8}{3} - 6 + 4 \right\} = \frac{h}{2} \cdot \frac{8-6}{3} = \\
 &= \frac{h}{3}.
 \end{aligned}$$

Analogamente, si calcolano gli altri due integrali e si trova

$$\int_a^b \rho_1(x) dx = 4 \frac{h}{3} \quad \text{e} \quad \int_a^b \rho_2(x) dx = \frac{h}{3}.$$

NOTA : $\int_a^b \rho_2(x) dx = \frac{h}{3}$ per simmetria

Per $\int_a^b \rho_1(x) dx$ possiamo usare il fatto che

$$A_0^{(2)} + A_1^{(2)} + A_2^{(2)} = b - a$$

$$\frac{h}{3} + A_1^{(2)} + \frac{h}{3} = 2h \Rightarrow A_1^{(2)} = 2h - \frac{2h}{3} = \frac{4h}{3}.$$

Perciò, la formula di integrazione di Cavalieri-Simpson è

$$I_{CS} = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \quad \left(h = \frac{b-a}{2} \right)$$

$$= \frac{b-a}{6} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

Si dimostra che l'errore nella formula di Cavalieri-Simpson è espressa come (per $f \in C^4((a,b))$),

$$E_{CS} = - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) \quad \text{con } \xi \text{ punto opportuno, non noto, di } (a,b).$$

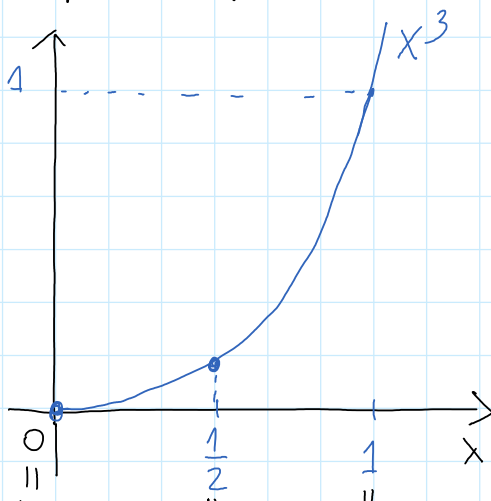
$$= - \frac{(b-a)^5}{2^5 \cdot 90} f^{(4)}(\xi)$$

$$= - \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi)$$

Ne segue che la formula di Cavalieri-Simpson ha grado di precisione 3.

ESERCIZIO Qual è l'errore che si commette calcolando $\int_0^1 x^3 dx$ con Cavalieri-Simpson?

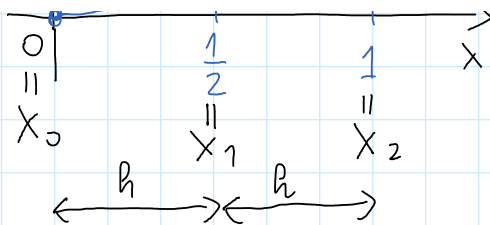
È zero perché $f(x) = x^3$ è un polinomio di grado 3.



$$I_{CS} = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

$$\left(h = \frac{1-0}{2} \right) = \frac{1/2}{3} \left[0^3 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^3 + 1^3 \right] =$$

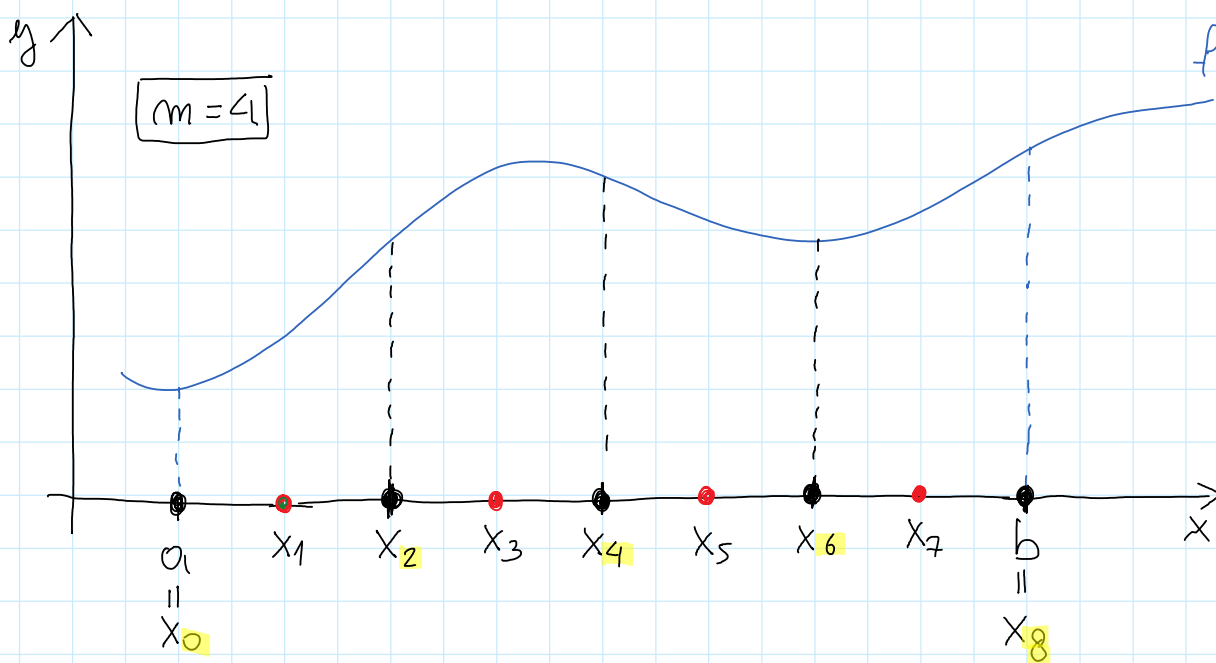
$$= \frac{1}{6} \left(1 + 1 \right) =$$



$$= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{8} + 1 \right) =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{9}{8} = \frac{1}{4} = I$$

Non sempre l'errore di integrazione E_{CS} è nullo. Per contenere l'errore usiamo le stesse idee viste per le formule dei trapezi composte: dividiamo l'intervallo di integrazione (a, b) in m intervalli $(*)$ e ciascuno dei quali applico le formule di Cavalieri - Simpson oppure ricavate. $(*)$ di uguale ampiezza.
Vediamo un esempio con $m = 4$ intervalli.



Ho $2m + 1$ punti di cui l'ultimo è x_{2m} . Inoltre, è

$$h = x_i - x_{i-1} = \frac{(b-a)/m}{2} = \frac{b-a}{2m}$$

essendo $\frac{b-a}{m}$ l'ampiezza del generico intervallo.

Perciò, la formula di Cavalieri - Simpson composta è

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^m \int_{I_i} f(x) dx = \sum_{i=1}^m \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x) dx =$$

$\in (x_{2i-2}, x_{2i})$

$$\begin{aligned}
 & \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^m I_i \quad \text{with } x_{2i-2} \quad \in (x_{2i-2}, x_{2i}) \\
 & = \sum_{i=1}^m \left\{ \left(\frac{h}{3} \right) \left[f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i}) \right] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi_i) \right\} \\
 & = \underbrace{\frac{h}{3} \sum_{i=1}^m \left[f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i}) \right]}_{\text{CAVALIERI - SIMPSON COMPOSTA}} - \underbrace{\frac{h^5}{90} \sum_{i=1}^m f^{(4)}(\xi_i)}_{\text{ERRORE}}
 \end{aligned}$$

La formula di CAVALIERI - SIMPSON COMPOSTA è

$$\begin{aligned}
 I_{CS,C}^{(m)} &= \frac{h}{3} \sum_{i=1}^m \left[f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i}) \right] = \\
 &= \frac{h}{3} \left\{ \overbrace{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}^{i=1} + \overbrace{f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)}^{i=2} + \right. \\
 &\quad \overbrace{f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)}^{i=3} + \dots + \\
 &\quad \left. \overbrace{f(x_{2m-2}) + 4f(x_{2m-1}) + f(x_{2m})}^{i=m} \right\} \\
 &= \frac{h}{3} \left\{ f(x_0) + 2 \sum_{\substack{i \text{ pari} \\ \text{interni}}} f(x_i) + 4 \sum_{i \text{ dispari}} f(x_i) + f(x_{2m}) \right\}
 \end{aligned}$$

Consideriamo l'errore:

$$\begin{aligned}
 E_{CS,C}^{(m)} &= - \frac{h^5}{90} \sum_{i=1}^m f^{(4)}(\xi_i) = - \frac{h^5}{90} m \left(\frac{\sum_{i=1}^m f^{(4)}(\xi_i)}{m} \right) = \\
 &\quad h^5 \dots D^{(4)}(x) \quad = f^{(4)}(\xi) \text{ con } \xi \text{ opportuno punto di } (a, b)
 \end{aligned}$$

$$= - \frac{h^5}{90} \cdot m \cdot f^{(4)}\left(\xi\right) =$$

$$= - \frac{(b-a)^5}{2^5 \cdot 90 \cdot m^4} \cdot m \cdot f^{(4)}\left(\xi\right) = - \frac{(b-a)^5}{2880 m^4} f^{(4)}\left(\xi\right)$$

Interessa una maggiorazione del valore assoluto dell'errore;
posto

$$M_4 = \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|$$

abbiamo

$$|E_{cs, c}^{(m)}| = \frac{(b-a)^5}{2880 m^4} |f^{(4)}(\xi)| \leq \frac{(b-a)^5 M_4}{2880 m^4}$$

Nota M_4 , posso calcolare il valore di m che sicuramente rende l'errore $|E_{cs, c}^{(m)}| < \epsilon$ con ϵ dato.

OSSERVAZIONE Vediamo il legame tra $E_{cs, c}^{(m)}$ e $E_{cs, c}^{(2m)}$.

$$\frac{E_{cs, c}^{(m)}}{E_{cs, c}^{(2m)}} = \frac{- \frac{(b-a)^5}{2880 m^4} f^{(4)}(\xi)}{- \frac{(b-a)^5}{2880 (2m)^4} f^{(4)}(\tilde{\xi})} = 16 \frac{f^{(4)}(\xi)}{f^{(4)}(\tilde{\xi})}$$

≈ 16 se $f^{(4)}(x)$ non "cambia troppo" in (a, b) .

Però, l'errore con $2m$ intervalli è (circa) $1/16$ di quello con m intervalli.

ESERCIZIO Sia $f(x) = x^2 - 1$. Per quale valore di $x_0 > 1$ del metodo di Newton sarebbe $x_1 = 5/4$?

È per $k=0, 1, 2, \dots$ $E(x_k)$ $x_k^2 - 1$ $x_k^2 + 1$

È per $k=0, 1, 2, \dots$

$$X_{k+1} = X_k - \frac{p(X_k)}{p'(X_k)} = X_k - \frac{X_k^2 - 1}{2X_k} = \frac{X_k^2 + 1}{2X_k}$$

Quindi deve essere (per $k=0$)

$$X_1 = \boxed{\frac{5}{4} = \frac{X_0^2 + 1}{2X_0}} \quad \text{che dà } X_0 = 2.$$

ESERCIZIO Sia $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 1$. Calcolare $\int_0^1 f(x) dx$
con Corollario-Simpson composta
con $m = 2$ intervalli.

