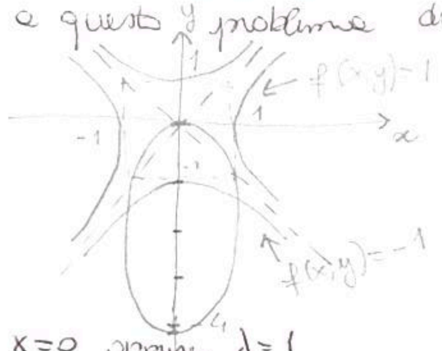
EX 1 fila A — Analisi Matematica II — 24 giugno 2015

Sia

Data la funzione $f(x,y)=x^2-y^2$ e la curva vincolo di equazione $g(x,y)=x^2+\frac{(y+2)^2}{4}-1=0$.
Rappresentare sul piano cartesiano la curva vincolo e le curve di livello di f di eq. $f(x,y)=\pm 1$.
Scrivere la Lagrangiana e determinare gli eventuali p.ti critici attraverso le condizioni di Lagrange. Classificare gli eventuali punti critici trovati attraverso la matrice hessiana orlata. Enunciare il Teorema di Weierstrass e determinare la sua applicabilità a questo problema di ottimo vincolato, ricavandone nel caso le conclusioni.

Ris.



$$L(x,y,\lambda)=x^2-y^2-\lambda\left[x^2+\frac{(y+2)^2}{4}-1\right]$$

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda)=2x-2\lambda x=0 \\ L'_y(x,y,\lambda)=-2y-\frac{1}{2}\lambda(y+2)=0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda)=-\left[x^2+\frac{(y+2)^2}{4}-1\right]=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x(1-\lambda)=0 \\ 2y+\frac{1}{2}\lambda y+\lambda=0 \\ x^2+\frac{(y+2)^2}{4}=1 \end{cases}$$

Da ① $x=0$ oppure $\lambda=1$

$x=0$ in ③ $\quad \frac{(y+2)^2}{4}=1 \quad (y+2)^2=4 \quad y+2=\pm 2 \begin{cases} y=0 & \lambda=0 & A(0,0) \\ y=-4 & \lambda=-8 & B(0,-4) \end{cases}$

$\lambda=1$ in ② $\quad 2y+\frac{1}{2}y+1=0 \quad y=-\frac{2}{5}$, in ③ $\quad x^2+\frac{64}{25}\cdot\frac{1}{4}=1 \quad x^2=\frac{9}{25} \quad x=\pm\frac{3}{5}$

$C(3/5,-2/5)$ $\lambda=1$, $\quad D(-\frac{3}{5},-2/5)$ $\lambda=1$

$$|\tilde{H}(x,y,\lambda)|=\begin{vmatrix} 0 & 2x & \frac{1}{2}(y+2) \\ 2x & 2-2\lambda & 0 \\ \frac{1}{2}(y+2) & 0 & -2-\frac{1}{2}\lambda \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}(y+2)^2(1-\lambda)+4x^2(2+\frac{1}{2}\lambda$$

$|\tilde{H}(0,0,0)|=-\frac{1}{2}\cdot 4=-2<0 \qquad |\tilde{H}(0,-4,-8)|=-\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 9=-18<0$

$|\tilde{H}(3/5,-2/5,1)|=4\cdot\frac{9}{25}\cdot\frac{5}{2}=\frac{18}{5}>0 \qquad |\tilde{H}(-3/5,-2/5,1)|=4\cdot\frac{9}{25}\cdot\frac{5}{2}=\frac{18}{5}>0$

$A(0,0)$ punto di minimo relativo vincolato

$B(0,-4)$ punto di minimo relativo vincolato

$C(3/5,-2/5)$ punto di max relativo vincolato

$D(-3/5,-2/5)$ punto di max relativo vincolato

Teorema di Weierstrass

"Ogni funzione continua definita in un insieme chiuso e limitato ammette massimo e minimo assoluti".

La funzione f è continua, la curva vincolo è chiusa e limitata $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ massimo e minimo assoluti.

$f(A)=f(0,0)=0 \qquad f(B)=f(0,-4)=-16$

$f(C)=f(3/5,-2/5)=f(D)=f(-3/5,-2/5)=1/5$

$B(0,-4)$ punto di minimo assoluto vincolato

$C(3/5,-2/5)$ $D(-\frac{3}{5},-\frac{2}{5})$ punti di max assoluto vincolato

Analisi Matematica II 24 luglio 2015

EX2 fila A

i) Sia $y = y(x)$ implicitamente definita da $y(0)=1$ e

$$e^{xy} + y^2 - x - 2 + 15x^2 = 0.$$

Verificare che siano soddisfatte le ipotesi del teorema di Dini

ii) Calcolare $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{y(x)}{x^2}$.

Ris.

Sia $f(x,y) = e^{xy} - y^2 - x - 2 + 15x^2$

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$f(0,1) = e^0 + 1 - 0 - 2 + 0 = 1 + 1 - 2 = 0$

$f_y(x,y) = x e^{xy} + 2y \qquad f_y(0,1) = 0 + 2 \neq 0$

Sono verificate le Hp. del teorema di Dini $\Rightarrow$

$\exists\,!$ funzione $y = y(x)$ definita implicitamente da $f(x,y)=0$ in un intorno U di 0 t.c. $y(0)=1$, tale funzione è derivabile infinite volte in U

In particolare y è continua in U $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = y(0) = 1 > 0$

Essendo $x^2 \geq 0$, $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0^+$

Allora $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{y(x)}{x^2} = +\infty$.

Analisi Matematica II 24 luglio 2013

EX 3 fila A

i) Definire un campo vettoriale conservativo

ii) Enunciare i teoremi sulle condizioni sufficienti e sulle condizioni necessarie e sufficienti affinché un c.v. sia conservativo

iii) Determinare tutte le eventuali primitive in $\mathbb{R}^2$ di $F(x,y)=(\underbrace{2xy}_{F_1}, \underbrace{x^2}_{F_2})$.

Ris

Def. Un campo vettoriale $F: A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ si dice conservativo in A se $\exists$ una funzione $g: A \to \mathbb{R}$, detta potenziale, $g \in C^1(A)$ t.c. $\nabla g = F$.

Proposizione Sia A aperto e connesso e $F \in C^0(A, \mathbb{R}^3)$ allora SFE:

1. F ha primitive in A (F è conservativo perché $n=3$).
2. $\oint_\gamma F = 0$ $\forall \gamma$ chiusa e regolare a tratti contenuta in A.
3. $\int_{\gamma_1} F = \int_{\gamma_2} F$ per ogni coppia di curve regolari a tratti γ_1, γ_2 contenute in A ed aventi stesso punto iniziale e stesso punto finale.

Proposizione

$F \in C^1(A, \mathbb{R}^3)$
A aperto stellato
F chiuso

$\Rightarrow$ F conservativo in A

Teorema

$F \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$
A aperto semplicemente connesso
F chiuso

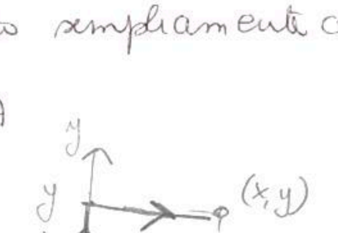
$\Rightarrow$ F conservativo in A

Sia $F(x,y) = (2xy, x^2)$. $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $\mathbb{R}^2$ aperto semplicemente connesso

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x = \frac{\partial}{\partial x} x^2 = \frac{\partial}{\partial x} F_2 \Rightarrow F \text{ è chiuso in } A$$

$\Rightarrow F$ ha primitive

Una primitiva è data da



1) $g(x,y) = \int_{x_0}^{x} F_1(t, y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} F_2(x,t)\,dt$ con (x_0, y_0) un punto fissato di $\mathbb{R}^2$

oppure (2) $g(x,y) = \int_{y_0}^{y} F_2(x_0, t)\,dt + \int_{x_0}^{x} F_1(t,y)\,dt$. Sia $(x_0,y_0)=(0,0)$; uso (1).

$g(x,y) = \int_0^x 0\,dt + \int_0^y x^2\,dt = x^2 t \Big|_0^y = x^2 y$. Siccome $g_x = 2xy$, $g_y = x^2 \Rightarrow \nabla g = F$

Essendo $\mathbb{R}^2$ connesso, tutte le primitive di F sono date da $x^2y + c$, $c \in \mathbb{R}$.