Ricevimento del 26 Gennaio 2011

Davide Boscaini

Queste sono le note del ricevimento del 26 Gennaio. Ho scelto di scrivere queste poche pagine per chi non fosse stato presente al ricevimento. Invito chi trovasse alcuni errori a segnalarli presso davide.boscaini@studenti.univr.it.

Esercizio 1. Calcolare una primitiva del seguente integrale

$$\int \frac{16^x}{2^{2+3x}} + 3x^2\,dx$$

Soluzione. Per evitare di portarsi avanti termini troppo ingombranti indichiamo con I l'integrale assegnato. Ora, per la proprietà di *linearità* dell'integrale, possiamo "spezzare" l'integrale assegnato in due termini:

$$I = \int \frac{16^x}{2^{2+3x}}\,dx + \int 3x^2\,dx.$$

Ora per la proprietà di *omogeneità* dell'integrale possiamo "portare fuori" dal simbolo dell'integrale le costanti:

$$\int \frac{16^x}{2^{2+3x}}\,dx + \int 3x^2\,dx = \int \frac{16^x}{2^2 \cdot 2^{3x}}\,dx + 3\int x^2\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{16^x}{2^{3x}}\,dx + 3\int x^2\,dx.$$

Infine notiamo che il primo termine può essere riscritto nel seguente modo:

$$\int \frac{16^x}{2^{3x}}\,dx = \int \frac{16^x}{8^x}\,dx = \int \left(\frac{16}{8}\right)^x\,dx = \int 2^x\,dx.$$

A questo punto abbiamo finito le possibili semplificazioni: passiamo quindi a calcolare le primitive dei due membri individuati.

$$\int 2^x\,dx = \frac{2^x}{\log 2} + c_1,$$
$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c_2.$$

Quello che abbiamo ottenuto è:

$$\begin{aligned}\int \frac{16^x}{2^{2+3x}} + 3x^2\,dx &= \frac{1}{4}\frac{2^x}{\log 2} + \frac{c_1}{4} + 3\frac{x^3}{3} + 3c_2\\ &= \frac{2^x}{4\log 2} + x^3 + c.\end{aligned}$$

Di conseguenza *una* primitiva dell'integrale assegnato è

$$I = \frac{2^x}{4\log 2} + x^3,$$

ottenuta scegliendo $c = 0$.

Definizione 1. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione numerica, allora la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$$

si dice *serie di potenze* a coefficienti a_n centrata in x_0.

Data una serie di potenze, la domanda che è interessante porsi è la stessa di quella per le serie numeriche, ovvero: la serie è convergente o divergente?

In particolare lo studio della convergenza delle serie di potenze segue questo schema: se $x = x_0$, allora sicuramente la serie converge e il valore a cui essa converge è 0. Se $x \neq 0$, si deve studiare la convergenza assoluta di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n||x-x_0|^n,$$

ad esempio con il *criterio del rapporto*[1]. Applicando tale criterio si arriva a

$$\frac{|a_{n+1}||x-x_0|^{n+1}}{|a_n||x-x_0|^n} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x-x_0| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x-x_0| \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L|x-x_0|,$$

con

$$L = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

La serie converge assolutamente (e quindi semplicemente) se $L|x-x_0| < 1$, ovvero se $|x-x_0| < 1/L$. Se invece $L|x-x_0| > 1$, ovvero se $|x-x_0| > 1/L$, la serie diverge. Infine se $L|x-x_0| = 1$, cioè $|x-x_0| = 1/L$, non possiamo ottenere informazioni. Di conseguenza la serie sarà convergente nell'intervallo $(x_0 - R, x_0 + R)$ e divergente all'infuori di esso. Proprio per questo motivo $1/L$ è detto *raggio di convergenza* e, in genere, si indica con R. Per quanto riguarda invece gli estremi dell'intervallo di convergenza, dovremo sostituire il loro valore all'interno del termine generale della serie, ottenendo così una serie numerica: il comportamento della serie di potenze in $x = -R$ e in $x = R$, è deciso dal comportamento delle serie numeriche corrispondenti.

Cerchiamo di capire meglio il tutto con degli esercizi...

Esercizio 2. Studiare il comportamento della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}}.$$

Soluzione. Quella assegnata è effettivamente una serie di potenze centrata in x_0, infatti essa è del tipo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n,$$

[1]La serie dei valori assoluti è evidentemente una serie a termini positivi, per studiarne il segno si possono quindi applicare i ben noti metodi per le serie a termini positivi. Oltre al criterio del rapporto ricordo che abbiamo visto il *criterio della radice*, il *metodo del confronto* ed il *metodo del confronto asintotico*.

dove $a_n = 1/\sqrt{n}$ ed $x_0 = 2$. Come accennato poco sopra, la prima cosa da fare è calcolarsi il raggio di convergenza:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n+1|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \Big/ \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n+1-1}{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{1-\frac{1}{n+1}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Quindi $R := 1/L = 1$. Per quanto visto prima, per $|x-2| < 1$, ovvero per $1 < x < 3$, la serie converge assolutamente, mentre per $|x-2| > 1$, ovvero per $x > 3$ o $x < 1$, la serie diverge. Rimane da discutere il caso $|x-2| = 1$, ovvero cosa succede se $x = 3$ o $x = 1$. Nel primo caso la serie numerica che si ottiene è

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3-2)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty^2,$$

mentre per il secondo caso si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1-2)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},$$

che è una serie *a segno alterno*. Dal momento che

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \searrow 0,$$

per il *criterio di Leibniz* essa converge. In conclusione la serie assegnata converge per $x \in [1,3)$, diverge altrove.

Osservazione. Nel caso più generale, una serie di potenze è una serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (f(x))^n,$$

con $f(x)$ una generica funzione di una variabile reale. Lo studio della convergenza di queste serie segue lo schema descritto all'inizio delle note.

Esercizio 3. Studiare il comportamento della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{n^2-n+1} (2\sin x + 1)^n.$$

Soluzione. Quella assegnata è effettivamente una serie di potenze di coefficienti

$$a_n = \frac{n+2}{n^2-n+1}.$$

[2] Vedi note relative al ricevimento del 19 Gennaio, reperibili presso la pagina web del corso al seguente link: http://www.scienze.univr.it/fol/main?ent=oi&codiceCs=S24&codins=10534&cs=420&discr=&discrCd=.

La prima cosa da fare è calcolare il raggio di convergenza:

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n+1|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+3}{n^2+n+2} \Big/ \frac{n+2}{n^2-n+1} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+3)(n^2-n+1)}{(n+2)(n^2+n+2)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3(1+3/n)(1-1/n+1/n^2)}{n^3(1+2/n)(1+1/n+2/n^2)} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Quindi $R := 1/L = 1$. Per quanto visto prima, la serie converge assolutamente (e quindi semplicemente) per

$$
|2\sin x + 1| < 1 \Rightarrow \begin{cases} 2\sin x + 1 < 1, \\ 2\sin x + 1 > -1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x < 0, \\ \sin x > -1, \end{cases}
$$

cioè per

$$
\pi < x < \frac{3}{2}\pi \text{ o } \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi^3.
$$

Al di fuori di tale intervallo, ovvero per $x < \pi$ o $x > 2\pi$, la serie diverge. Rimane da discutere, caso per caso, i tre punti rimasti:

- Se $x = \pi$, allora la serie di potenza assegnata si riduce alla serie numerica

$$
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{n^2-n+1}(2\sin\pi+1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{n^2-n+1}.
$$

  Si tratta di una serie a termini positivi, quindi per studiarne la convergenza si può applicare il *criterio del confronto asintotico*. Scegliamo come test di confronto la serie armonica

$$
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n}.
$$

  Allora si vede facilmente che

$$
\lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{n+2}{n^2-n+1}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+2n}{n^2-n+1} = 1,
$$

  quindi il criterio del confronto asintotico la nostra serie si comporterà come la serie scelta per il confronto. Dal momento che, come è noto, $\sum_{n=0}^{+\infty} 1/n$ diverge, anche la nostra serie divergerà.

- Se $x = 2\pi$, allora la serie numerica che si ottiene è la stessa della precedente, e quindi, come la precedente, diverge.

- Se $x = \frac{3}{2}\pi$, invece la serie numerica che si ottiene è la seguente

$$
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{n^2-n+1} \left(2\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)+1\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n^2-n+1}.
$$

[3] La soluzione si può individuare aiutandosi con una circonferenza goniometrica.

Si tratta di una serie a segno alterno, quindi va studiata con il criterio di Leibniz. Per prima cosa controlliamo se la serie è decrescente:

$$|a_{n+1}| < |a_n| \Leftrightarrow \frac{n+3}{n^2+n+2} < \frac{n+2}{n^2-n+1} \Leftrightarrow \frac{n^2+6n+1}{(n^2+n+2)(n^2-n+1)} > 0,$$

che come condizione è sempre verificata. Rimane da verificare solo se

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0,$$

e nel nostro caso

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n^2-n+1} \approx \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Quindi per Leibniz in $x = 3\pi/2$ c'è convergenza *semplice*.

In conclusione la serie assegnata converge per $x \in (\pi, 2\pi)$, diverge altrove.