Programma del corso di Analisi Funzionale

Seconda parte - a.a. 2011-12

G. Orlandi

Lezione del 5/12/11 (2 ore). Presentazione degli obiettivi della seconda parte del corso. Lo spazio di Banach degli operatori lineari e limitati $\mathcal{L}(E,F)$ tra due spazi di Banach E,F. Norma di un operatore: per $T \in \mathcal{L}(E,F)$, si ha $||T||_{\mathcal{L}} = \sup\{||Tv||_F,\ ||v||_E \leq 1\} = \sup\{||Tv||_F/||v||_E\,,\ 0 \neq v \in E\}$. Operatori invertibili: formano un sottoinsieme aperto di $\mathcal{L}(E) \equiv \mathcal{L}(E,E)$.

Serie di Neumann: per $T \in \mathcal{L}(E)$, e $||T|| < 1$, si ha che $(I-T)$ è invertibile e vale $(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} T^n$ (la serie a secondo membro converge per il criterio di convergenza totale in $\mathcal{L}(E)$, e componendo con $I-T$ si ottiene l'identità).

Insieme risolvente $\rho(T)$: è formato dai $\lambda \in \mathbb{C}$ tali che $(\lambda I - T)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$, ed è un insieme aperto di $\mathbb{C}$. Dalla serie di Neumann si ricava che $\{\lambda \in \mathbb{C}\,,\ |\lambda| > ||T||\} \subset \rho(T)$. Detto $r = \limsup_n(||T^n||)^{1/n} \leq ||T||$ il raggio spettrale di T, si può dimostrare che $\{\lambda \in \mathbb{C}\,,\ |\lambda| > r\} \subset \rho(T)$.

Spettro $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ di un operatore $T \in \mathcal{L}(E)$: è un insieme chiuso contenuto in $B(0,||T||) \subset \mathbb{C}$ formato dagli autovalori di T (spettro puntuale o discreto), ossia i $\lambda \in \mathbb{C}$ tali che $\ker(\lambda I - T) \neq 0$, e dallo spettro continuo ($\ker(\lambda I - T) = 0$ ma $\mathrm{Im}\,(\lambda I - T) \neq E$). Esempi: lo spettro continuo dell'operatore di traslazione (shift) a destra su ℓ^1 (o ℓ^2, ℓ^∞) contiene (solo) lo 0, e non vi è spettro discreto.

Lezione del 7/12/11 (2 ore). Operatore risolvente $R_\lambda = (T - \lambda I)^{-1}$ di un operatore $T \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \rho(T)$. Equazione risolvente $R_\lambda - R_\mu = (\lambda - \mu) R_\lambda R_\mu$: si ricava che esiste $\frac{dR_\lambda}{d\lambda} = R_\lambda^2$, ovvero R_λ è una funzione olomorfa di λ, le cui singolarità sono costituite dallo spettro $\sigma(T)$. In particolare lo spettro discreto sarà costituito da singolarità isolate, ed il calcolo dei residui applicato ad R_λ dà informazioni sulla decomposizione in blocchi di Jordan di T.

Richiami sulla caratterizzazione degli insiemi relativamente compatti (ovvero a chiusura compatta) in uno spazio metrico via ricoprimenti, via successioni, o via ϵ-rete.

Lo spazio degli operatori compatti $\mathcal{K}(E,F) \subset \mathcal{L}(E,F)$. Il limite di operatori compatti nella norma $\mathcal{L}(E,F)$ è compatto, ovvero $\mathcal{K}(E,F)$ è chiuso in $\mathcal{L}(E,F)$. Un operatore compatto composto (a destra o a sinistra) con un operatore limitato risulta ancora compatto. In particolare, $\mathcal{K}(E) \equiv \mathcal{K}(E,E)$ è un ideale bilatero di $\mathcal{L}(E)$, e l'identità non è un operatore compatto tranne che in dimensione finita. Operatori di rango finito. Il limite di operatori di rango finito è compatto.

Approssimazione mediante operatori di rango finito per operatori compatti $T \in \mathcal{K}(E,H)$, con H spazio di Hilbert: detta $v_1, ..., v_N \in H$ una ϵ-rete per $T(B_E)$, e detti $V_N = \text{span}\langle v_1, ..., v_N\rangle$, $T_N = P_N \cdot T$ con P_N la proiezione ortogonale su V_N, si ha che T_N ha rango finito e $||T_N - T||_{\mathcal{L}(E,H)} \leq 2\epsilon$.

Esempi di operatori compatti: l'operatore $T : (a_n)_n \mapsto (2^{-n}a_n)_n$ su ℓ^1 (in quanto limite degli operatori di rango finito $T_N : (a_n)_n \mapsto (\sigma_n 2^{-n}a_n)_n$, con $\sigma_n = 1$ per $n \leq N$ e $\sigma_n = 0$ per $n > N$). Operatori integrali di Fredholm - Volterra su $C^0([a,b])$ (sono compatti in quanto trasformano famiglie di funzioni limitate in famiglie di funzioni equicontinue).

Lezione del 13/12/11 (2 ore). Esempi di operatori compatti: immersione compatta di $W^{1,p}([a,b])$, $p > 1$, in $C^{0,\alpha}([a,b])$, $\alpha = 1 - \frac{1}{p}$; operatori di Hilbert-Schmidt su $L^2([a,b])$, operatori di convoluzione.

Teoria di Riesz-Fredholm: il teorema dell'alternativa di Fredholm per operatori del tipo $A = I - T$ con T operatore compatto in uno spazio di Hilbert: l'immagine $\operatorname{im} A$è chiusa, e si ha la decomposizione in somma diretta ortogonale $H = \operatorname{im} A \oplus \ker A^* = \operatorname{im} A^* \oplus \ker A$, con $A^* = I - T^*$, $\ker A = 0 \Leftrightarrow \operatorname{im} A = H$, ed infine $\dim \ker A = \dim \ker A^* < +\infty$. Per l'alternativa di Fredholm, l'equazione $Au = u - Tu = f$ o ammette un'unica soluzione per ogni dato $f \in H$ (nel caso $\ker A = \ker A^* = 0$), oppure (nel caso $\ker A^* \neq 0$) ammette soluzioni a patto che il dato f verifichi la condizione di ortogonalità $f \perp \ker A^*$.

Il teorema dell'alternativa vale più in generale per operatori del tipo $A = I - T$ con $T \in \mathcal{K}(E)$, E di Banach.

Lezione del 14/12/11 (2 ore). Spettro di un operatore compatto: contiene lo zero, gli eventuali elementi diversi da zero appartengono necessariamente allo spettro discreto (per l'alternativa di Fredholm), i relativi autospazi hanno dimensione finita, ed infine hanno lo zero quale unico eventuale punto di accumulazione.

Teoria spettrale per operatori compatti autoaggiunti in spazi di Hilbert: gli autovalori sono reali, ed esiste una base Hilbertiana di autovettori, che "diagonalizza" l'operatore.

Dimostrazione del teorema spettrale: la forma quadratica $Q(x) = \langle Tx, x\rangle$ associata all'operatore compatto T è debolmente continua, dato che $x_n \rightharpoonup x_0 \Rightarrow Tx_n \to Tx_0$ e inoltre $|x_n| \leq M$, dunque

$$|\langle Tx_n, x_n\rangle - \langle Tx_0, x_0\rangle| \leq |Tx_n - Tx_0| \cdot |x_n| + |\langle Tx_0, x_n - x_0\rangle| \to 0.$$

Per il Teorema di Weierstrass, $|Q(x)|$ ammette massimo e minimo sulla palla unitaria chiusa $\overline{B_1}$ (debolmente compatta). Sia e_1 un punto di massimo: si ha $|e_1| = 1$, ed inoltre, per ogni $|v| \leq 1$ tale che $\langle v, e_1\rangle = 0$, si ha $\langle v, Te_1\rangle = 0$, come si verifica osservando che, in virtù del Teorema dei moltiplicatori di Lagrange, e_1 è punto critico della funzione $\psi(x,\lambda) = Q(x) + \lambda|x|^2$ per x appartenente allo spazio bidimensionale generato da e_1 e da v. In particolare, $Te_1 = \langle Te_1, e_1\rangle \cdot e_1$, ovvero e_1 è autovettore di T e $Q(e_1) = \langle Te_1, e_1\rangle$ è, in modulo, il massimo autovalore di T.

Iterando il procedimento, determiniamo e_n autovettore di T, con $|e_n| = 1$, punto di massimo di $|Q(x)|$ su $(\text{span}\{e_1, ..., e_{n-1}\})^\perp \cap \overline{B_1}$, con $\lambda_n = Q(e_n)$ l'autovalore corrispondente. Si ha $|\lambda_{n-1}| \geq |\lambda_n|$: se per un certo n_0 si ha $\lambda_{n_0} = Q(e_{n_0}) = 0$, allora si ha $(\text{span}\{e_1, ..., e_{n_0-1}\})^\perp = \ker T$. Infatti, da una parte si ha $Q(w) = 0$ per ogni $w \in (\text{span}\{e_1, ..., e_{n_0-1}\})^\perp$, e inoltre, se $\langle v, e_i\rangle = 0\ \forall\, i < n_0$, allora $\langle Tv, e_i\rangle = \langle v, Te_i\rangle = 0$. Dall'identità (di polarizzazione) $4\langle Tv, u\rangle = Q(u+v) - Q(u-v) = 0\ \forall\, u$ tale che $\langle u, e_i\rangle = 0\ \forall\, i < n_0$, ponendo $u = Tv$ si deduce $|Tv|^2 = 0$, ossia $v \in \ker T$. Pertanto l'insieme $\{e_1, ..., e_{n_0}\}$, completato con un sistema ortonormale completo di $\ker T$, costituisce una base Hilbertiana di autovettori di T.

Alternativamente, rimane definita una successione di autovettori ortonormali e_n, da cui $e_n \rightharpoonup 0$ per la diseguaglianza di Bessel (per ogni $w \in H$, $\sum_n \langle e_n, w\rangle \leq ||w||^2 \Rightarrow \langle e_n, w\rangle \to 0$ per $n \to +\infty$), e dunque $Te_n = \lambda_n e_n \to 0$, da cui $|\lambda_n| = |\langle Te_n, e_n\rangle| \searrow 0$. Sia $N = \overline{\text{span}\{e_1, ..., e_n, ...\}}^\perp$. Per $v \in N$ si ha necessariamente $Q(v) = 0$ e quindi, per quanto visto sopra, $N = \ker T$.

L'insieme $\{e_1, ..., e_n, ...\}$, completato con un sistema ortonormale completo di $\ker T$, costituisce una base Hilbertiana di autovettori di T. □

Lezione del 19/12/11 (2 ore). Esempio di applicazione del teorema di decomposizione spettrale alla rappresentazione della soluzione del problema di Dirichlet omogeneo in dimensione uno. Si tratta di risolvere l'equazione $-u'' = f$ su $[0,\pi]$ con dati al contorno $u(0) = u(\pi) = 0$. Osservato che $C^0_c([0,\pi]) = \{u \in C^0([0,\pi]),\ u(0) = u(\pi) = 0\}$, Sia $\Delta_D : C^2 \cap C^0_c([0,\pi]) \to C^0([0,\pi])$ l'operatore (iniettivo) $\Delta_D u = -u''$. Si ha $T = (\Delta_D)^{-1} \in \mathcal{K}(C^0([0,\pi]))$ (operatore integrale) ed inoltre T è limitato in norma L^2, per cui si estende per densità ad un operatore $T \in \mathcal{L}(L^2([0,\pi]))$ la cui immagine contiene il sottospazio denso $C^2 \cap C^0_c([0,\pi])$. Risulta che $T \in \mathcal{K}(L^2([0,\pi]))$ ed inoltre T è simmetrico, cosa che si deduce dal fatto che Δ_D è simmetrico: per $u, v \in C^2 \cap C^0_c([0,\pi])$ si ha, integrando per parti, -$\int_0^\pi u'' \cdot v = \int_0^\pi u' \cdot v' = -\int_0^\pi u \cdot v''$. Si conclude che T è simmetrico grazie alla densità di $C^2 \cap C^0_c([0,\pi])$ in $L^2([0,\pi])$.

Se e è un autovettore di T (nel sottospazio denso $C^2 \cap C^0_c([0,\pi])$) con autovalore λ allora si ha $-\lambda e'' = e$ in $[0,\pi]$, $e(0) = e(\pi) = 0$ le cui soluzioni sono date da $\lambda_n = n^{-2}$, $e_n = c{\cdot}\sin(nx)$. Le funzioni $\{\sin(nx)\}_n$ formano pertanto una base ortogonale massimale di $L^2([0,\pi])$: data $f \in L^2([0,\pi])$ si ha infatti l'espansione di Fourier $f(x) = \sum_n f_n \cdot \sin(nx)$ con $f_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin(nt)dt$ (si tratta in effetti della serie di Fourier dell'estensione dispari di f a $[-\pi,\pi]$). Si ottiene in particolare

$$Tf = \sum_{n=1}^{\infty} f_n T(\sin(nx)) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{\sin(nx)}{n^2} = \int_0^\pi G(x,t) f(t) dt\,,$$

con

$$G(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)\sin(nt)}{n^2}$$

la cosiddetta funzione di Green associata all'operatore Δ_D. La funzione

$$u(x) = \int_0^\pi G(x,t)f(t)dt$$

è la soluzione del problema di Dirichlet omogeneo su $[0,\pi]$. Se $f \in C^0([0,\pi])$ si tratta di una soluzione *classica* in $C^2 \cap C_c^0([0,\pi])$, mentre se $f \in L^2([0,\pi])$ si interpreta come soluzione *in senso generalizzato*, ovvero come limite di soluzioni classiche: se $f_n \to f$ in L^2 e $f_n \in C^0$, allora le corrispondenti soluzioni classiche u_n convergono in L^2 alla soluzione generalizzata u.

Teorema di Lax-Milgram: data una forma bilineare $a(u,v)$ continua ($a(u,v) \leq M|u||v|$) e coerciva ($0 < \alpha|u|^2 \leq a(u,u)\ \forall\ u \neq 0$) su uno spazio di Hilbert H, per ogni forma lineare e continua $\phi \in H^*$ esiste un unico elemento $u \in H$ tale che $a(u,v) = \phi(v)$ per ogni $v \in H$. Se inoltre a è simmetrica ($a(u,v) = a(v,u)$), nel qual caso a definisce un prodotto scalare su H equivalente a quello dato, essendo $\alpha|u|^2 \leq a(u,u) \leq M|u|^2$, si ha la caratterizzazione $u = \arg\min\{\frac{1}{2}a(v,v) - \phi(v)\,,\ v \in H\}$.

Dimostrazione: si osservi che per il teorema di rappresentazione di Riesz, l'equazione in questione si può riscrivere $\langle Au, v\rangle = \langle f, v\rangle$ per ogni $v \in H$, ovvero $Au = f$, dove $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ verifica le condizioni $0 < \alpha|u| \leq |Au| \leq M|u|\ \forall\ u \neq 0$.

Per la coercività, da $\alpha|u| \leq |Au|$ segue che $\ker A = 0$. Inoltre, $\alpha|u_n - u_m| \leq |Au_n - Au_m|$ implica che se $Au_n \to y$, ossia Au_n è di Cauchy in H, anche u_n è di Cauchy, e quindi $u_n \to u$, da cui $y = Au$ e dunque $\operatorname{im} A$ è un sottospazio chiuso. Se poi $v \perp \operatorname{im} A$, si ha $\langle v, Au\rangle = 0\ \forall\ u \in H$. In particolare, $0 = \langle v, Av\rangle \geq \alpha|v|^2$, da cui $v = 0$ e dunque $\operatorname{im} A = H$. Pertanto, A è iniettiva e suriettiva, ovvero la tesi del teorema.

Nel caso a sia inoltre simmetrica, per il teorema di rappresentazione di Riesz si ha $\phi(v) = a(g,v)$ per un certo $g \in H$, da cui u verifica $a(u-g,v) = 0\ \forall\ v \in H$, ovvero u è la proiezione ortogonale (secondo il prodotto scalare indotto da a) di g su H, ovvero u rende minima la distanza (indotta da a) al quadrato $a(v-g, v-g)$, o, equivalentemente, il funzionale $F(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - \phi(v)$ per $v \in H$, di cui l'equazione $a(u,v) = \phi(v)$ è l'equazione di Eulero-Lagrange $\partial_v F(u) \equiv F'(u)\cdot v = 0\ \forall\ v \in H$.

Lezione del 21/12/11 (2 ore). Teorema di Stampacchia (si applica alle disequazioni variazionali): dato $K \subset H$ convesso chiuso, e $\phi \in H^*$, esiste un'unica $u \in K$ tale che $a(u, v-u) \geq \phi(v-u)\ \forall\ v \in K$. Il problema è equivalente a trovare $u \in K$ tale che $\langle g-u, v-u\rangle \leq 0\ \forall\ v \in K$, con $g = \rho(f-Au)+u$, ossia $u = P_K g = P_K(\rho(f-Au)+u)$, con $\rho > 0$. Per ρ sufficientemente piccolo, la trasformazione $Sv = P_K(v + \rho(f - Av))$ è una contrazione, per cui ammette un unico punto fisso. Se a è simmetrica, si ha, per Riesz, $\phi(w) = a(g,w)$ e l'equazione si riscrive $a(g-u, v-u) \leq 0$, ovvero u è il punto di K a distanza (indotta da a) minima da g, ovvero u minimizza $F(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - \phi(v)$ per $v \in K$.

Metodo di Galerkin (o di approssimazione interna): per $V_h \subset H$, $\dim V_h < +\infty$, si considera la soluzione u_h del sistema $a(u,v) = \phi(v)\ \forall\ v \in V_h$. Il lemma di Céa garantisce che $|u - u_h| \leq \frac{M}{\alpha}\operatorname{dist}(u, V_h)$ (in altre parole, u_h assomiglia alla proiezione ortogonale di u su V_h). Considerando una successione di spazi finito-dimensionali $V_h \subset V_{h+1}$ tali che $H = \overline{\cup_h V_h}$, si ha $u_h \to u$ in H. Il problema approssimato finito-dimensionale è un sistema lineare in cui la matrice dei coefficienti, detta matrice di rigidità (*stiffness*) è data da $[a(f_i, f_j)]$, con $\{f_i\}$ base di V_h.

La scelta della successione di spazi V_h, ovvero di un sistema di loro generatori $\{f_i\}$ è operata in modo da semplificare il più possibile la risoluzione del sistema lineare approssimante, o rendere la stima dell'errore $||u_h - u||$ la più efficiente possibile. Alcuni esempi nel caso $V_h \subset L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

1) se a si rappresenta mediante un operatore compatto autoaggiunto, si può considerare una base hilbertiana $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di $L^2(\Omega)$ composta di autovettori di A, e porre V_h =span$< e_1, ..., e_h >$. Il sistema corrispondente risulta diagonale.

2) Si può considerare una base $\{f_i\}$ di V_h costituita da elementi finiti (funzioni lineari (o polinomiali) a tratti rispetto ad una triangolazione fissata del dominio), che in genere dà luogo ad una matrice di rigidità sparsa. Il metodo degli elementi finiti si usa in problemi di elasticità, scienza dei materiali, fluidodinamica,...

3) Basi di Haar, wavelets, funzioni radiali di base: sono basi Hilbertiane di $L^2(\Omega)$ la cui codifica è economica dal punto di vista computazionale. Tali metodi si usano in analisi e trattamento di immagini e segnali in genere.

3) Nel caso in cui il problema di partenza abbia una soluzione molto regolare (ad esempio, $u \in C^\infty(\Omega)$ come nel caso dell'equazione di Laplace), può essere conveniente usare i cosiddetti *metodi spettrali* di approssimazione, ossia considerare una base hilbertiana di $L^2(\Omega)$ composta da polinomi (trigonometrici e non) ortogonali: dato che per il Lemma di Céa u_h è comparabile alla proiezione ortogonale di u su V_h, il tasso di convergenza è tanto migliore quanto maggiore è la regolarità di u (ad esempio, i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier di u decadono tanto più rapidamente a zero quanto più u è regolare).

Lezione del 9/1/12 (2 ore). Derivate deboli. Spazi di Sobolev $W^{1,p}(I)$, $I \subset \mathbb{R}$ intervallo. Definizione, esempi: la funzione valore assoluto. Controesempio: la funzione di Heaviside Continuità delle funzioni di Sobolev. Proprietà di $W^{1,p}(I)$: completezza, riflessività, separabilità. Alcune caratterizzazioni di $W^{1,p}(I)$ per $1 < p \leq +\infty$. Lo spazio $W^{1,\infty}(I)$ delle funzioni lipschitziane.

Lezione del 10/1/12 (2 ore). Lo spazio di Banach $\mathcal{M}(I) = (C^0_c(I))'$ delle misure di Radon su I dotato della norma $\|\mu\| = |\mu|(I)$, con $|\mu| = \mu_+ + \mu_-$ la misura *variazione totale* di μ: si identifica qui $\mu \in \mathcal{M}(I)$ con il funzionale $F_\mu(\phi) = \int_I \phi \, d\mu$. Se identifichiamo inoltre $f \in L^1(I)$ con la misura $\mu_f = f(x)\, dx$ (assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue dx) si ha $\|\mu_f\| = \|f\|_{L^1(I)}$ e quindi l'inclusione isometrica $L^1(I) \subset \mathcal{M}(I)$. Funzioni con derivate misure: per $u \in L^1_{loc}(I)$ e $\mu \in \mathcal{M}(I)$ si dice che u ha derivata misura μ se vale la formula

$$\int_I u\phi' \, dx = -\int_I \phi \, d\mu \qquad \text{per ogni } \phi \in C^1_c(I)\,.$$

Lo spazio delle funzioni a variazione limitata $BV(I)$ delle funzioni $u \in L^1(I)$ con derivata $\mu \in \mathcal{M}(I)$. Dotato della norma $\|u\|_{BV} = \|u\|_{L^1} + \|\mu\|$, $BV(I)$ è uno spazio di Banach. Alcune caratterizzazioni delle funzioni a variazione limitata su un intervallo.

Esempio: la funzione di Heaviside è a variazione limitata su $[-1,1]$ e la sua derivata misura è la delta di Dirac concentrata nell'origine.

Per quanto visto, si ha l'inclusione $W^{1,1}(I) \subset BV(I)$. Lo spazio $BV(I)$ è più naturale di $W^{1,1}(I)$ per le applicazioni: se ad esempio $u_n \in W^{1,1}(I)$ è tale che $u_n \to u$ in L^1 e $\|u_n'\|_{L^1} \leq C$, si ha che $u_n' \rightharpoonup \mu \in \mathcal{M}(I)$ (per compattezza debole) con $\|\mu\| \leq \liminf \|u_n'\|_{L^1(I)}$ e μ è la derivata misura di u, ovvero necessariamente $u \in BV(I)$.

Operatore di prolungamento $W^{1,p}(I) \to W^{1,p}(\mathbb{R})$. Densità delle funzioni liscie in $W^{1,p}$. Lo spazio $W_0^{1,p}(I)$ e sue caratterizzazioni. Diseguaglianza di Poincaré. Lo spazio $H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$. Norme equivalenti su $W_0^{1,p}(I)$.

Approccio variazionale ai problemi al contorno in dimensione 1: formulazione debole, esistenza e unicità della soluzione debole (approccio variazionale alla Lax-Milgram o Stampacchia), regolarità (hilbertiana) della soluzione debole, maggiore regolarità e ritorno alla formulazione classica. Il caso del problema di Dirichlet omogeneo.

Lezione del 16/1/12 (2 ore). Formulazione debole dei problemi al contorno: Pb di Dirichlet non omogeneo, Pb di Neumann, Problema di Sturm-Liouville, problemi con condizioni al contorno miste (Robin). Principio del massimo (metodo delle troncature di Stampacchia). Decomposizione spettrale di L^2 mediante autovettori dell'operatore associato al problema di Sturm-Liouville.

Lezione del 17/1/12 (2 ore). Cenni alle equazioni di evoluzione di tipo parabolico e iperbolico (equazione del calore e delle onde): risoluzione mediante separazione di variabili nel caso la parte spaziale dell'operatore sia di tipo Sturm-Liouville.

Cenni sulla teoria delle distribuzioni. Gli spazi $\mathcal{D}(\Omega)$ e $\mathcal{D}'(\Omega)$, per $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Si ha $\varphi_j \to \varphi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ se $\operatorname{spt}(\varphi_j) \subset K \; \forall\, j$ per un certo compatto K e $||D^\alpha \varphi_j - D^\alpha \varphi||_{L^\infty(K)} \to 0 \; \forall\, \alpha$ multiindice. Vale $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se e solo se $\forall\, K \subset \Omega$ compatto, esiste $N \in \mathbb{N}$ e $C = C(K) > 0$ tale che $|T(\varphi)| \leq C \sup_{|\alpha| \leq N} ||D^\alpha \varphi||_{L^\infty(K)}$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\operatorname{spt}(\varphi) \subset K$. Ordine di una distribuzione. Distribuzione T_u associata ad una funzione u localmente sommabile in Ω: $\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx$. Distribuzione T_μ associata ad una misura di Radon μ in Ω: $\langle T_\mu, \varphi \rangle = \int_\Omega \varphi(x) d\mu(x)$. Distribuzione di Dirac $\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0)$.

Lezione del 18/1/12 (2 ore). Derivate distribuzionali: $\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle$, per $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Se $T_j \to T$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ allora $D^\alpha T_j \to D^\alpha T$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$. Esempi: derivata della funzione di Heaviside, derivata della delta di Dirac. Gradiente distribuzionale $\nabla T(\vec{\phi}) := -T(\nabla \cdot \vec{\phi})$, per $\vec{\phi} = (\phi_1, .., \phi_n)$, $\phi_i \in \mathcal{D}(\Omega)$. Lo spazio $W^{1,p}(\Omega)$ delle funzioni $u \in L^p(\Omega)$ con gradiente distribuzionale $\nabla u \in L^p(\Omega)$. Lo spazio $BV(\Omega)$ delle funzioni $u \in L^1(\Omega)$ con gradiente distribuzionale ∇u rappresentato da una misura di Radon vettoriale. Variazione totale di una misura di Radon vettoriale: per $\vec{\mu} = (\mu_1, ..., \mu_n)$

con $\mu_i \in \mathcal{M}(\Omega) = (C_c^0(\Omega))'$ si pone

$$\|\vec{\mu}\| = \sup\left\{ \int_\Omega \vec{\phi}\cdot d\vec{\mu} = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \phi_i \, d\mu_i \,, \quad \phi_i \in C_c^0(\Omega), \quad \sup_{x\in\Omega} \sqrt{\sum \phi_i(x)^2} \equiv \|\vec{\phi}\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

Esempio di funzioni in $BV(\Omega)$: le funzioni caratteristiche di insiemi E aperti limitati a frontiera ∂E regolare (di classe C^1 a tratti). Si ha infatti, per il teorema della divergenza,

$$\nabla \mathbf{1}_E(\vec{\phi}) = -\int_E \nabla\cdot\vec{\phi}\, dx = -\int_{\partial E} \vec{\phi}\cdot n\, d\sigma\,,$$

dove n è la normale unitaria esterna a ∂E. Si ricava $|\nabla \mathbf{1}_E(\vec{\phi})| \leq \|\vec{\phi}\|_\infty \cdot |\partial E|$, ovvero $\nabla \mathbf{1}_E$ è una misura di Radon vettoriale. Scegliendo opportunamente la funzione test $\vec{\phi}$ in modo che $|\vec{\phi}(x)| \leq 1$ e $\vec{\phi} = n$ su ∂E si ottiene $\|\nabla \mathbf{1}_E\| = |\partial E|$, ovvero la variazione totale del gradiente della funzione caratteristica di E misura il perimetro di E (ovvero la superficie della frontiera ∂E).

Definizione di insiemi di perimetro finito in Ω: sono gli insiemi misurabili $E \subset \Omega$ tali che $\mathbf{1}_E \in BV(\Omega)$. Formulazione debole del problema isoperimetrico nella classe degli insiemi di perimetro finito.

Lezione del 23/1/12 (2 ore). Convoluzione di distribuzioni: per $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, si pone $T * \varphi(x) = \langle T, \tau_x \check{\varphi}\rangle$. Esempio: se $T = T_\mu$ con $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^\backslash)$, si ha $T_\mu * \varphi = \int \varphi(x-y)\, d\mu(y)$. Derivata del prodotto di convoluzione: $D^\alpha(T*\varphi) = D^\alpha T * \varphi = T * D^\alpha \varphi$. Per $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (almeno una delle quali a supporto compatto) si definisce $S*T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ in modo che valga $(S*T)*\varphi = S*(T*\varphi)$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. La delta di Dirac δ_0 è l'elemento neutro rispetto al prodotto di convoluzione. Problemi differenziali formulati nel senso delle distribuzioni. Soluzione fondamentale per un operatore lineare e continuo L su $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$: è una distribuzione G tale che $L(G) = \delta_0$. Per $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, la distribuzione $U = G * T$ è soluzione dell'equazione $L(U) = T$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Esempio: la soluzione fondamentale del Laplaciano in $\mathbb{R}^n$, che soddisfa $-\Delta G = \delta_0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ è la funzione $G(x) = c_n |x|^{2-n}$ per $n > 2$, con c_n costante opportuna, e $G(x) = \frac{1}{2\pi}\log|x|$ per $n = 2$.

Spazi $W^{1,p}(\Omega)$ e spazio $BV(\Omega)$ in dimensione n. Norme: $\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|\nabla u\|_{L^p}$, $\|u\|_{BV} = \|u\|_{L^1} + |\nabla u|(\Omega)$, dove $|\nabla u|$ è la misura variazione totale della misura vettoriale ∇u. Lo spazio di Hilbert $H^1 = W^{1,2}$, norma euclidea su H^1. Proprietà di $W^{1,p}$ e BV, risultati di densità, operatore di prolungamento $W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ nel caso Ω aperto limitato con frontiera di classe C^1. Caratterizzazione degli spazi di Sobolev $W^{1,p}$ (quozienti differenziali limitati, derivata distribuzionale continua su $L^{p'}$: nel caso $p = 1$ queste condizioni caratterizzano lo spazio BV). Lo spazio $W_0^{1,p}$, diseguaglianza di Poincaré. Teoremi di immersione di Sobolev-Morrey. Teorema di immersione compatta di Rellich-Kondrachov per $W^{1,p}(\Omega)$ con Ω limitato di classe C^1.

Applicazione all'esistenza di soluzioni del problema isoperimetrico (o, equivalentemente, isovolumetrico) in $\mathbb{R}^n$: fissato $R > 1$, si pone

$$\mathcal{P} = \left\{ E \subset B_R(0),\, \mathcal{L}^n(E) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_E \, d\mathcal{L}^n = 1,\ \mathbf{1}_E \in BV(B_{2R}(0)) \right\},$$

ovvero $\mathcal{P}$ contiene gli insiemi $E \subset B_R(0)$ di volume unitario e perimetro finito $\|\nabla \mathbf{1}_E\| \equiv |\nabla \mathbf{1}_E|(B_{2R}(0))$ in $B_{2R}(0)$: si osservi che dato che $E \subset B_R(0)$, la misura del perimetro di E in $B_{2R}(0)$ coincide con la misura di tutto il perimetro di E, ovvero con $|\nabla \mathbf{1}_E|(\mathbb{R}^n)$. Consideriamo il problema isovolumetrico

$$\min_{E \in \mathcal{P}} \|\nabla \mathbf{1}_E\| .$$

Sia $E_n \in \mathcal{P}$ una successione minimizzante, ossia $\|\nabla \mathbf{1}_{E_n}\| \to \inf_{\mathcal{P}} \|\nabla \mathbf{1}_E\|$. Si ha

$$\|\mathbf{1}_{E_n}\|_{BV(B_{2R}(0))} = 1 + \|\nabla \mathbf{1}_{E_n}\| \leq C,$$

per cui, a meno di una sottosuccessione, $\mathbf{1}_{E_n} \to \mathbf{1}_E$ in $L^1(B_{2R}(0))$ per immersione compatta di $BV(B_{2R}(0))$ in $L^1(B_{2R}(0))$. Si vede facilmente che $E \subset B_R(0)$ e $\mathcal{L}^n(E) = 1$, ed inoltre $\nabla \mathbf{1}_{E_n} \to \nabla \mathbf{1}_E$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Per compattezza debole in $C_c^0(\mathbb{R}^n)'$ si ha, a meno di sottosuccessioni, $\nabla \mathbf{1}_{E_n} \rightharpoonup \vec{\mu}$ in $C_c^0(\mathbb{R}^n)'$, da cui per l'unicità del limite è $\vec{\mu} = \nabla \mathbf{1}_E$ ed infine

$$\|\nabla \mathbf{1}_E\| \leq \liminf_{n \to +\infty} \|\nabla \mathbf{1}_{E_n}\| = \inf_{F \in \mathcal{P}} \|\nabla \mathbf{1}_F\|$$

per la semicontinuità inferiore della norma sullo spazio duale $C_c^0(\mathbb{R}^n)'$. Quindi E ha perimetro minimo in $\mathcal{P}$.

La teoria della regolarità (basata ad esempio sulle simmetrizzazioni di Steiner) ci permette di affermare che l'insieme ottimale E è in realtà una palla di volume unitario contenuta in $B_R(0)$, e pertanto non dipende dalla scelta di $R > 1$ (parametro utilizzato esclusivamente per localizzare il problema su un insieme limitato, in modo da poter sfruttare l'immersione compatta di BV in L^1): si tratta dunque in realtà della soluzione del problema isovolumetrico (ovvero isoperimetrico) su tutto $\mathbb{R}^n$.

Lezione del 25/1/12 (2 ore). Formulazione variazionale di problemi in dimensione n: formulazione in H_0^1 del problema di Dirichlet omogeneo con dato $f \in L^2$, esistenza, unicità e stabilità (stime a priori) della soluzione debole via Lax-Milgram (o via teorema di rappresentazione di Riesz). Regolarità H^2 della soluzione debole. Interpretazione variazionale della soluzione come minimo del funzionale $E(v) = \|\nabla v\|_2^2 + \|v - f\|_2^2$ su $H_0^1(\Omega)$. Esempi di regolarizzazione di Tychonoff (di un problema di minimi quadrati): modello BV di Osher-Rudin-Fatemi per l'elaborazione delle immagini, modelli di apprendimento da dati sparsi. Risolubilità di un problema generale del secondo ordine via alternativa di Fredholm.

Bibliografia.

Brézis; *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Masson - Dunod (1994).

Brézis; *Functional Analysis, Sobolev spaces and Partial Differential Equations*, Springer (2010).
Giusti; *Minimal surfaces and functions of bounded variation*, Birkhäuser (1984).
Kolmogorov, Fomin; *Elementi di Teoria delle Funzioni e di Analisi Funzionale*, Edizioni Mir (1980).