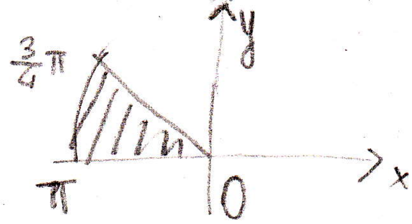
③ Calcolare, se $\exists$, $\iint_T xy \, dx\, dy$ ove

$T = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1,\ y \leq -x \}$



<u>Ris</u>

Teorema

Sia $C \subset \mathbb{R}^2$ chiuso limitato e misurabile. Sia $f : C \to \mathbb{R}$ limitata.

Suppongo che $\exists\ E \subset C$ misurabile con area $E = 0$ ed f sia continua su $C \setminus E$

$\Rightarrow f$ è integrabile su T

Teorema Formula di riduzione degli integrali doppi

Sia $f \in C^0(C \setminus E)$, $C \subset \mathbb{R}^2$, E sottoinsieme di C di area nulla

Sia f limitata in C

a) se $C = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ a \leq x \leq b,\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \}$, φ, ψ continue

$$\Rightarrow \iint_C f(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\, dy$$

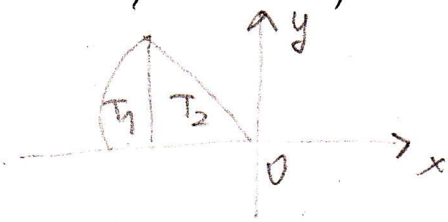
b) se $C = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ c \leq y \leq d\ \ \varphi(y) \leq x \leq \psi(y) \}$, φ, ψ continue

$$\Rightarrow \iint_C f(x,y)\, dx\, dy = \int_c^d dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\, dx$$

$T = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0,\ x^2+y^2 \leq 1,\ y \geq -x \}$ è un chiuso, limitato, misurabile del piano

f continua su T

$\Rightarrow f$ è integrabile su T



$T = T_1 \cup T_2$ con $T_1 = \{ -1 \leq x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \}$ e

$T_2 = \{ -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 0 \ \cup\ 0 \leq y \leq -x \}$

T_1, T_2 domini normali rispetto all'asse x

Usando coordinate polari di centro l'origine T è il trasformato di

$K = \{ (\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho \leq 1 \quad \vartheta \in [\frac{3}{4}\pi, \pi] \}$

secondo $\phi(\rho, \vartheta) = (\rho \cos\vartheta,\ \rho \sin\vartheta)$

EX3 foglio D parte 1