

ESERCIZIO Calcolare il prodotto di L e A con

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$$

Scegliendo a e b opportuni possiamo annullare 2 elementi sotto la posizione $(1,1)$ di $L_1 A$:

$$L_1 A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -a \cdot a_{11} + q_{21} & -a \cdot a_{12} + q_{22} & -a \cdot a_{13} + q_{23} \\ -b \cdot a_{11} + q_{31} & -b \cdot a_{12} + q_{32} & -b \cdot a_{13} + q_{33} \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} r_2^{(1)} - r_1^{(1)} \cdot a \\ r_3^{(1)} - r_1^{(1)} \cdot b \end{matrix}$$

→ affinché siano 0 devono avere

$$-a \cdot a_{11} + q_{21} = 0 \Rightarrow a = q_{21}/a_{11}$$

$$-b \cdot a_{11} + q_{31} = 0 \Rightarrow b = q_{31}/a_{11}$$

Ottengo con il sistema equivalente ad $Ax = b$ dato da

$$L_1 A x = L_1 b \quad \text{con} \quad L_1 A = \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & \times & \times \end{pmatrix}$$

Per annullare l'elemento in posizione $(3,2)$ di $L_1 A$ premoltiplico per

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -c & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \cdot L_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -c & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & q_{23}^{(2)} \\ 0 & q_{32}^{(2)} & q_{33}^{(2)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & q_{23}^{(2)} \\ 0 & q_{32}^{(2)} - c a_{22}^{(2)} & a_{33}^{(2)} - a_{23}^{(2)} c \end{pmatrix}$$

→ affinché sia uguale a 0 basta

$$q_{32}^{(2)} - c a_{22}^{(2)} = 0 \Rightarrow c = q_{32}^{(2)} / a_{22}^{(2)}$$

Quindi, il sistema

$$\boxed{L_2 L_1 A} x = L_2 L_1 b \quad \text{è equivalente a } Ax = b$$

↳ Triangolare alto.

Posto

$$L_2 L_1 A = U$$

ottenso $A = (L_1^{-1} L_2^{-1}) U = L U.$

Il calcolo delle inverse L_1^{-1} e L_2^{-1} è semplice:

$$L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -c & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}$$

OSSERVAZIONE Praticamente, su esempi semplici, il metodo di eliminazione Gaussiana viene portato avanti con le tabelle

$$\left(A \mid \underline{b} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 11 \\ 4 & 3 & 10 & 28 \\ 2 & 4 & 17 & 31 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{l_{21}=2 \\ l_{31}=1}]{\quad} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 14 & 20 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{l_{32}=3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

||
 $U = A^{(3)}$

Per cui

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Risolviamo col metodo delle sostituzioni all'indietro:

1) $2x_3 = 2 \Rightarrow x_3 = 1$

2) $x_2 + 4x_3 = 6 \Rightarrow x_2 = 6 - 4 \cdot x_3 = 6 - 4 \cdot 1 = 2$

$$\textcircled{0}) \quad 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \Rightarrow x_1 = \frac{11 - x_2 - 3x_3}{2} =$$

$$= \frac{11 - 2 - 3 \cdot 1}{2} = 3.$$

La soluzione è

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo anche L e U :

$$U = A^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO Calcolare la matrice L della fattorizzazione LU di

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

PROBLEMI DEL MEG.

Ci sono due problemi:

1. Il MEG si arresta se viene incontrato un elemento $a_{nn}^{(k)} = 0$ per qualche valore di k perché la divisione per $a_{nn}^{(k)}$ in questo caso non è possibile. Ad esempio se ho

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

il MEG si ferma al passo $k=1$ (si arresta prima di partire).

D'altro canto, il rimedio è semplice:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underline{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 0x_1 + 1x_2 = 1 \\ 1x_1 + 1x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1x_1 + 1x_2 = 2 \\ 0x_1 + 1x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{qui posso applicare}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 1 \end{cases}$$

qui posso applicare

M.E.G.

Questa permutazione di righe avviene mediante una matrice di permutazione:

$$A^{(k)} \underline{x} = b^{(k)} \Leftrightarrow P_k A^{(k)} \underline{x} = P_k b^{(k)}$$

dove P_k scambia la riga k -esima che $a_{kn}^{(n)} = 0$ con una delle righe successive che ha $a_{in}^{(n)} \neq 0$, $i > k$.

Proviamo a costruire $P_k = P_1$ (perché $k=1$) dell'esempio precedente:

$$A = A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$P_1 A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

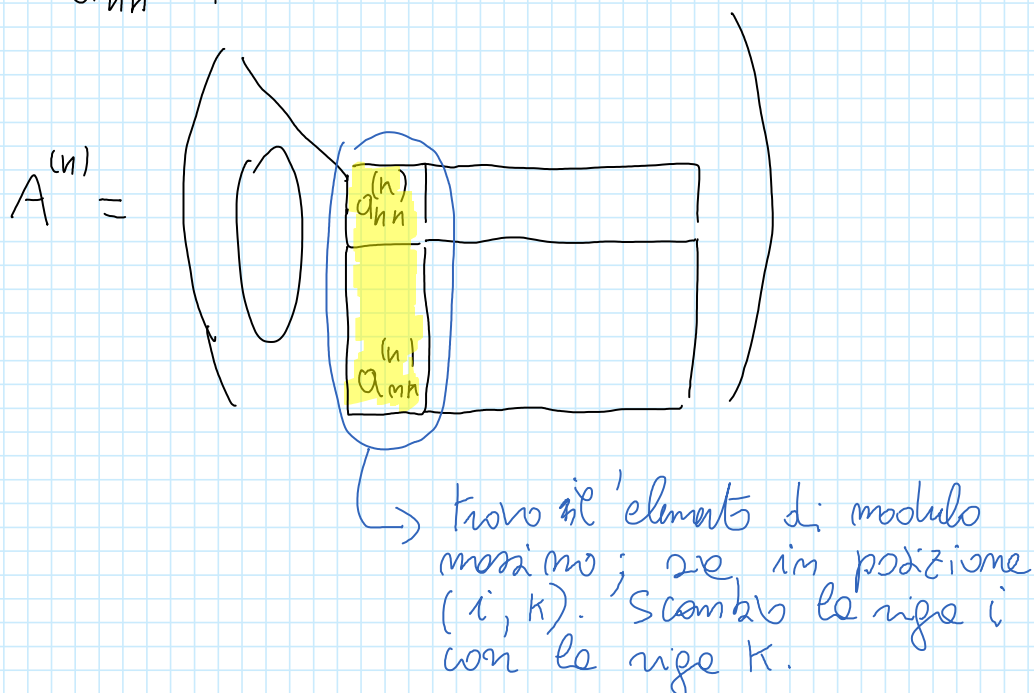
Vediamo come fare e scambiare 1° e 3° righe di una matrice 3×3 :

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$P_1 A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Nel caso in cui A sia non singolare l'operazione di scambio delle righe k -esima con la riga i -esima, $k < i \leq n$ tale che $a_{in}^{(n)} \neq 0$ è sempre possibile.

[2]. Il metodo MEG non è stabile sotto round-off ed amplificare gli errori di arrotondamento.
Si può dimostrare che per contenere il fenomeno una possibile modifica al MEG è quella, ad ogni passo k , di porre in posizione $a_{nn}^{(n)}$ l'elemento di modulo massimo presente nelle colonne k -esime di $A^{(n)}$
o/ò $a_{nn}^{(n)}$:



Queste due regole e dette **PIVOTING PARZIALE**.

Ha come obiettivo quello di contenere la propagazione degli errori di arrotondamento.

In questo moniero, il ~~poor~~ k -esimo viene modificato in questo modo:

$$A^{(n)} \underline{x} = b^{(n)} \longrightarrow \textcircled{a}) P_K A^{(n)} \underline{x} = P_K \underline{b}^{(n)} \text{ (SCAMBIO)}$$

$$\textcircled{b}) L_K P_K A^{(n)} \underline{x} = L_K P_K \underline{b}^{(n)} \text{ (ANNULLO ELEMENTI SOTTO } Q_{KK}^{(n)})}$$

Vediamolo in un esempio 3×3 :

$$1) \quad A^{(1)} \underline{x} = b^{(1)} \quad \rightarrow \quad \boxed{L_1 P_1 A^{(1)}} \underline{x} = \boxed{L_1 P_1 b^{(1)}}$$

$$\overline{= A^{(2)}} \quad \overline{= b^{(2)}}$$

$$\begin{pmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & x & x \end{pmatrix}$$

$$2) A^{(2)} \underline{x} = \underline{b^{(2)}} \longrightarrow P_2 A^{(2)} \underline{x} = P_2 \underline{b^{(2)}}$$

$$\boxed{L_2 P_2 A^{(2)}} \underline{x} = \boxed{L_2 P_2 \underline{b^{(2)}}}$$

$$= A^{(3)} = U \quad = \underline{b^{(3)}}$$

$$\begin{pmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

Cose cambia per la fattorizzazione LU?

$$A \underline{x} = \underline{b} \iff \boxed{L_2 P_2 L_1 P_1 A} \underline{x} = L_2 P_2 L_1 P_1 \underline{b}$$

$$= U$$

per cui è

$$L_2 P_2 L_1 P_1 A = U$$

Si può dimostrare che questa espressione può essere scritta come

$$PA = LU$$

con $P = P_2 P_1$, L triangolare bassa con elementi diagonali unitari e U triangolare alta.

Conoscendo, e priori, le permutazioni da fare, potrei applicare il MET senza nessuna strategia di pivot e PA ottenendo la fattorizzazione LU.

In MATLAB abbiamo la function lu che restituisce L, U, P dato in ingresso A .

OSSERVAZIONE Ci sono matrici particolari, quali

a) SIMMETRICHE DEF. POSITIVE

b) DOMINANZA DIAGONALE STRETTA PER COLONNE

$$\begin{pmatrix} \square & & \\ & \square & \\ & & \square \ddots \\ & & & \square \end{pmatrix} \quad |a_{ii}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|, \quad i=1, \dots, n$$

l'operazione di pivoting NON è necessaria.

COME VALUTIAMO LA BONTÀ DELLA SOLUZIONE OTTENUTA COL MEG (CON PIVOTING)?

$$A \underline{x} = \underline{b} \xrightarrow{\text{MEG}} \hat{\underline{x}} = \underline{x} + \delta \underline{x}$$

↑
approssimazione
col MEG

← soluzione
esatta

Quanto è buona $\hat{\underline{x}}$? Osserviamo che il RESIDUO

$$\hat{\underline{r}} = \underline{b} - A \hat{\underline{x}} \quad \text{e' tale che} \quad \underline{r} = \underline{b} - A \underline{x} = \underline{0}$$

Quindi mi aspetto che se $\hat{\underline{r}}$ è piccolo in norme allora la soluzione $\hat{\underline{x}}$ s'è buona.

Purtroppo, il MEG dà quasi sempre residui piccoli anche se $\hat{\underline{x}}$ è "lontano" da $\underline{x}$.

Vediamo perché.

$$A \hat{\underline{x}} = A(\underline{x} + \delta \underline{x}) = \underbrace{A \underline{x}}_{=\underline{b}} + \underbrace{A \delta \underline{x}}_{=\delta \underline{b}} \quad \left(\text{interpreto } A \delta \underline{x} \text{ come perturbazione di } \underline{b} \right)$$
$$= \underline{b} + \delta \underline{b}$$

Allora $\hat{\underline{x}}$ è la soluzione in ambiente esatte del sistema lineare in cui ho perturbato $\underline{b}$ delle quantità

$$\delta \underline{b} = A \hat{\underline{x}} - \underline{b} = -\hat{\underline{r}}.$$

me, allora

$$\frac{\|\delta \underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \leq \overline{K}(A) \frac{\|\delta \underline{b}\|}{\|\underline{b}\|} = \overline{K}(A) \cdot \frac{\|\hat{\underline{a}}\|}{\|\underline{b}\|}$$

ed ecco che anche se $\|\hat{\underline{a}}\|$ è piccolo ma $\overline{K}(A)$ è grande l'errore nella soluzione può essere considerevole.

NOTA: CORREGGE ALL'INIZIO LEZIONE LA PRIMA
MATRICE DEL MEG CHIAMANDOLA L_1 INVECE
CHE L .