



UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI VERONA

# PROBABILITA' E STATISTICA

Docente: Bruno Gobbi

## LE VARIABILI CASUALI DISCRETE

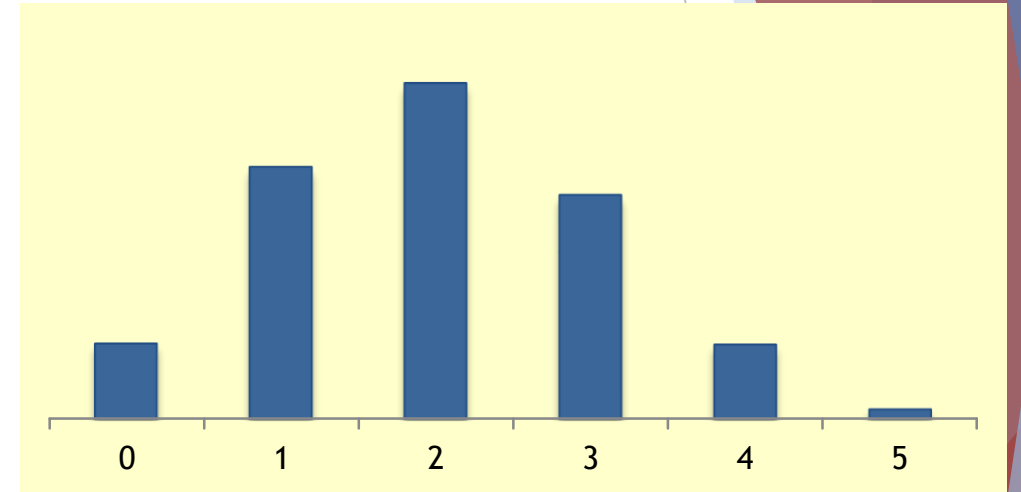
# VARIABILE CASUALE - DEFINIZIONE

Si definisce **Variabile Casuale** una grandezza che, associata ad un esperimento che genera un insieme di eventi necessari e incompatibili, assume valori nello spazio dei numeri reali secondo una funzione di probabilità  $P(X)$ .

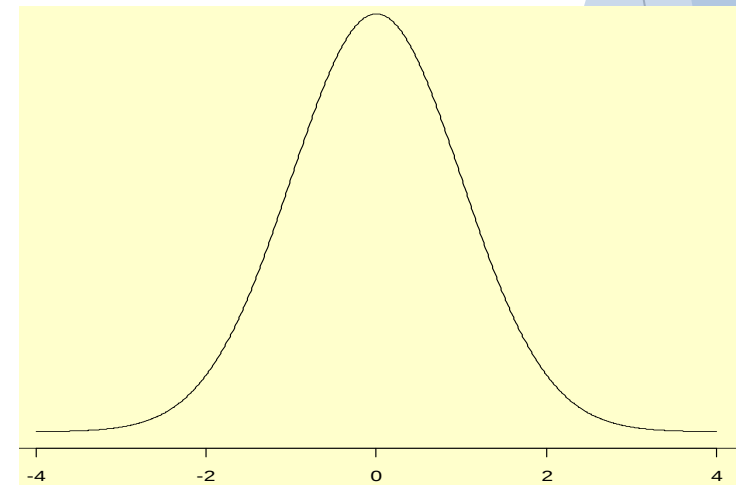
# FAMIGLIE DI VARIABILI CASUALI

Esistono due famiglie di Variabili Casuali:

► **V.C. Discrete**



► **V.C. Continue**



# ESEMPI DI VARIABILI CASUALI

## V.C. Discrete:

- ▶ Binomiale
- ▶ Poisson
- ▶ Geometrica

## V.C. Continue:

- ▶ Normale
- ▶ Esponenziale Negativa

# VARIABILI CASUALI DISCRETE

Nel caso delle v.c. Discrete l'esperimento genera un numero finito (ad es. da 0, 1, 2, ...,  $n$ ) o un'infinità numerabile (ad es. da 0, 1, 2, ...,  $\infty$ ) di eventi necessari e incompatibili, a ciascuno dei quali è associato un numero reale secondo un determinato schema probabilistico.

# VARIABILI CASUALI DISCRETE

Affinché lo schema probabilistico, ovvero la funzione di Probabilità  $P(X)$ , sia una v.c. occorre che gli eventi siano necessari e incompatibili, ovvero soddisfare queste due condizioni:

$$1) P(X_i) \geq 0 \quad i=1, 2, 3, \dots, n$$

$$2) \sum P(X_i)=1$$

# LA VARIABILE BINOMIALE

Ipotizziamo di avere un'urna con 10 palline, di cui 3 rosse, e di estrarre ogni volta una pallina, verificandone il colore e poi reinserendola nell'urna.

In questo caso la probabilità di estrarre una pallina rossa è costante in ogni prova e pari a  $3/10$ . Gli eventi “pallina rossa” sono indipendenti.

# LA VARIABILE BINOMIALE

La v.c. **Binomiale**, detta anche schema bernoulliano o delle prove con reinserimento, descrive quante volte si verifica l'evento  $x$  su  $n$  prove indipendenti.

# LA VARIABILE BINOMIALE

Sia  $n \in \mathbb{N}$  e sia  $x \leq n$ . La probabilità di osservare  $x$  successi in  $n$  prove, ciascuna con probabilità costante  $p$  è:

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x q^{(n-x)}$$

con  $x = 0, 1, 2, \dots, n$   
e  $q = 1 - p$

# LA VARIABILE BINOMIALE

I momenti della variabile binomiale sono:

► Media:  $\mu = np$

► Varianza:  $\sigma^2 = npq$

► Scarto quadratico medio:  $\sigma = \sqrt{npq}$

# ESEMPIO DI VARIABILE BINOMIALE

In un'urna sono presenti 10 palline, di cui 4 rosse e 6 bianche. Descrivere con un'opportuna v.c. la probabilità di estrarre una pallina rossa, reinserendo ogni volta la pallina e facendo 5 estrazioni.

# ESEMPIO DI VARIABILE BINOMIALE

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x q^{(n-x)}$$

$$p = 0,4 \quad \text{e} \quad q = 1 - 0,4 = 0,6$$

$$n = 5$$

$$x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$P(x) = \binom{5}{x} 0,4^x 0,6^{(5-x)}$$

# ESEMPIO DI VARIABILE BINOMIALE

Bisogna calcolare le probabilità per  $x$  che va da 0 a  $n=5$ . Iniziamo quindi con  $x=0$ :

$$\begin{aligned} P(0) &= \binom{5}{0} 0,4^0 0,6^{(5-0)} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 0,07776 = 0,07776 \end{aligned}$$

# ESEMPIO DI VARIABILE BINOMIALE

Continuando per  $x=1$ :

$$P(1) = \binom{5}{1} 0,4^1 0,6^{(5-1)}$$
$$= 5 \cdot 0,4 \cdot 0,1296 = 0,2592$$

# ESEMPIO DI VARIABILE BINOMIALE

Per  $x=2$ :

$$P(2) = \binom{5}{2} 0,4^2 0,6^{(5-2)}$$

$$= \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot 0,16 \cdot 0,216 = 0,3456$$

# ESEMPIO DI VARIABILE BINOMIALE

Procedendo:

$$P(3) = \binom{5}{3} 0,4^3 0,6^{(5-3)} = 0,2304$$

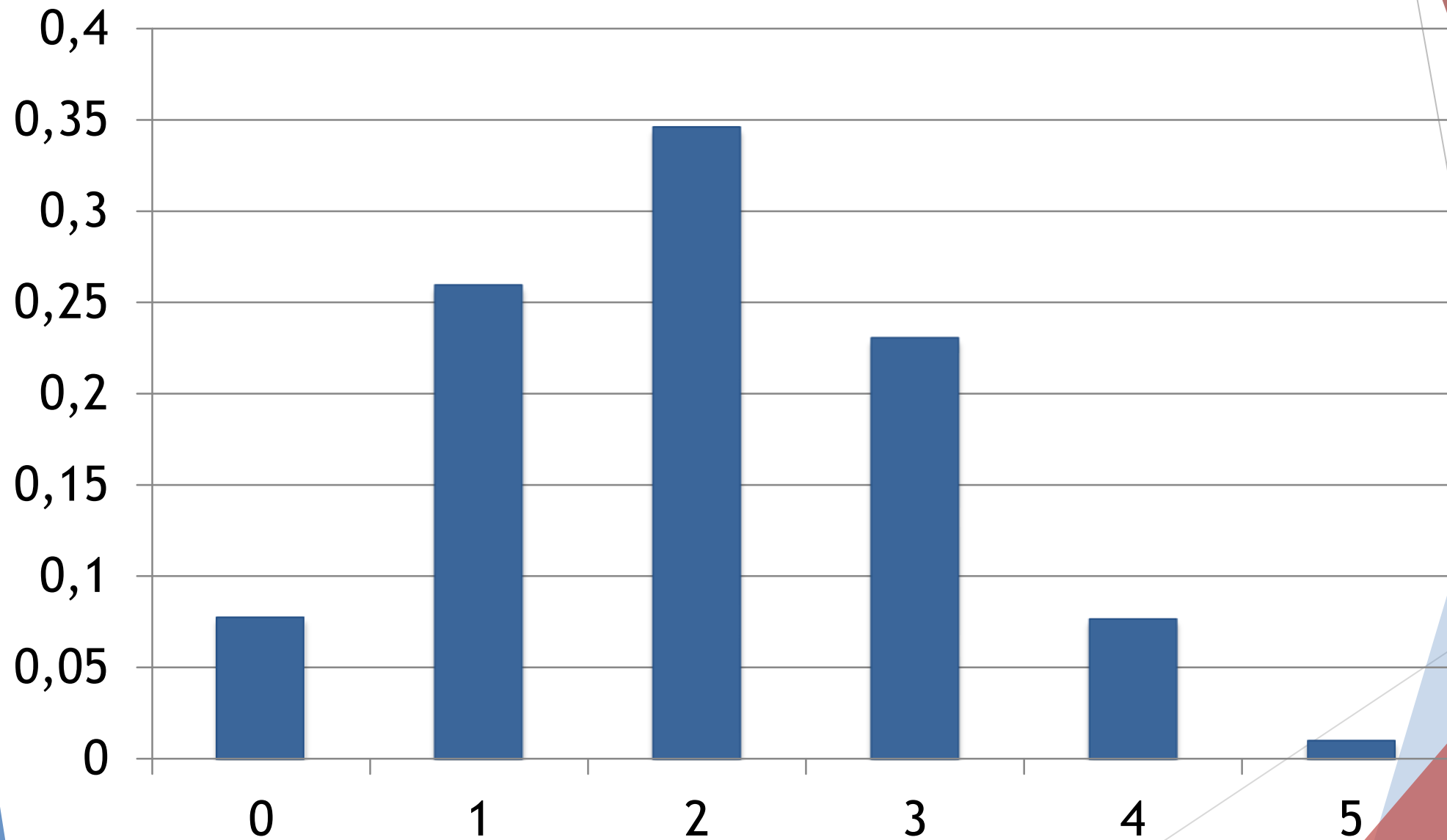
$$P(4) = \binom{5}{4} 0,4^4 0,6^{(5-4)} = 0,0768$$

$$P(5) = \binom{5}{5} 0,4^5 0,6^{(5-5)} = 0,01024$$

# ESEMPIO DI VARIABILE BINOMIALE

| $x$        | $P(x)$   |
|------------|----------|
| 0          | 0,07776  |
| 1          | 0,2592   |
| 2          | 0,3456   |
| 3          | 0,2304   |
| 4          | 0,0768   |
| 5          | 0,01024  |
| <b>TOT</b> | <b>1</b> |

# ESEMPIO DI VARIABILE BINOMIALE



# ESEMPIO DI VARIABILE BINOMIALE

Per quanto riguarda media, varianza e scarto quadratico medio:

$$M(x) = np = 5 \cdot 0,4 = 2$$

$$V(x) = npq = 5 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 1,2$$

$$E(x) = \sqrt{npq} = 1,0954$$

## ESEMPIO 2 DI VARIABILE BINOMIALE

Ipotizziamo che la probabilità che Vettel sulla Ferrari vinca un GP di Formula 1 nel 2016 sia costante e pari al 27%.

Descrivere con una opportuna variabile casuale la probabilità che Vettel vinca nei prossimi 3 GP.

## ESEMPIO 2 DI VARIABILE BINOMIALE

$$p = 0,27 \quad \text{e} \quad q = 1 - 0,27 = 0,73$$

$$n = 3$$

$$x = 0, 1, 2, 3$$

$$P(x) = \binom{3}{x} 0,27^x 0,73^{(3-x)}$$

## ESEMPIO 2 DI VARIABILE BINOMIALE

Bisogna calcolare le probabilità per  $x$  che va da 0 a  $n=3$ . Iniziamo quindi con  $x=0$ :

$$P(0) = \binom{3}{0} 0,27^0 0,73^{(3-0)}$$

$$= 0,389$$

...

# ESEMPIO 2 DI VARIABILE BINOMIALE

| $x$ | $P(x)$ |
|-----|--------|
| 0   | 0,389  |
| 1   | 0,4316 |
| 2   | 0,1597 |
| 3   | 0,0197 |
| TOT | 1      |

# ESEMPIO 2 DI VARIABILE BINOMIALE

Per quanto riguarda media, varianza e scarto quadratico medio:

$$M(x) = np = 3 \cdot 0,27 = 0,81$$

$$V(x) = npq = 3 \cdot 0,27 \cdot 0,73 = 0,5913$$

$$E(x) = \sqrt{npq} = 0,76896$$

# LA VARIABILE DI POISSON (EVENTI RARI)

La v.c. di **Poisson** descrive quante volte si verifica un evento, di probabilità infinitesima nella singola prova (o evento raro), in un numero infinito di prove.

Un esempio è il caso di un macchinario per microprocessori, del quale si sa che in media produce un pezzo difettoso ogni 10 mila.

La probabilità  $p=1/10.000$ , molto bassa e costante, è un evento raro.

# LA VARIABILE DI POISSON (EVENTI RARI)

$$P(x) = \frac{e^{-m} m^x}{x!}$$

dove:

$m$  = n° medio di volte in cui si verifica l'evento

$x$  = n° di prove effettuate ( $x = 0, 1, 2, \dots$ )

# LA VARIABILE DI POISSON

I momenti della variabile di Poisson sono:

- $M(x) = m$
- $V(x) = m$
- $E(x) = \sqrt{m}$

# ESEMPIO DI VARIABILE DI POISSON

Un macchinario per la stampa di chip per computer produce 2 pezzi difettosi ogni ora.

Descrivere con una opportuna v.c. il n° di pezzi difettosi per ora.

# ESEMPIO DI VARIABILE DI POISSON

$$P(x) = \frac{e^{-m} m^x}{x!}$$

Nel nostro caso  $m=2$  e quindi :

$$P(x) = \frac{e^{-2} 2^x}{x!}$$

con  $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

# ESEMPIO DI VARIABILE DI POISSON

Iniziamo da  $x=0$ :

$$P(0) = \frac{e^{-2} 2^0}{0!}$$

$$= 0,1353$$

# ESEMPIO DI VARIABILE DI POISSON

Procedendo:

$$P(1) = \frac{e^{-2} 2^1}{1!} = 0,27067$$

$$P(2) = \frac{e^{-2} 2^2}{2!} = 0,27067$$

...

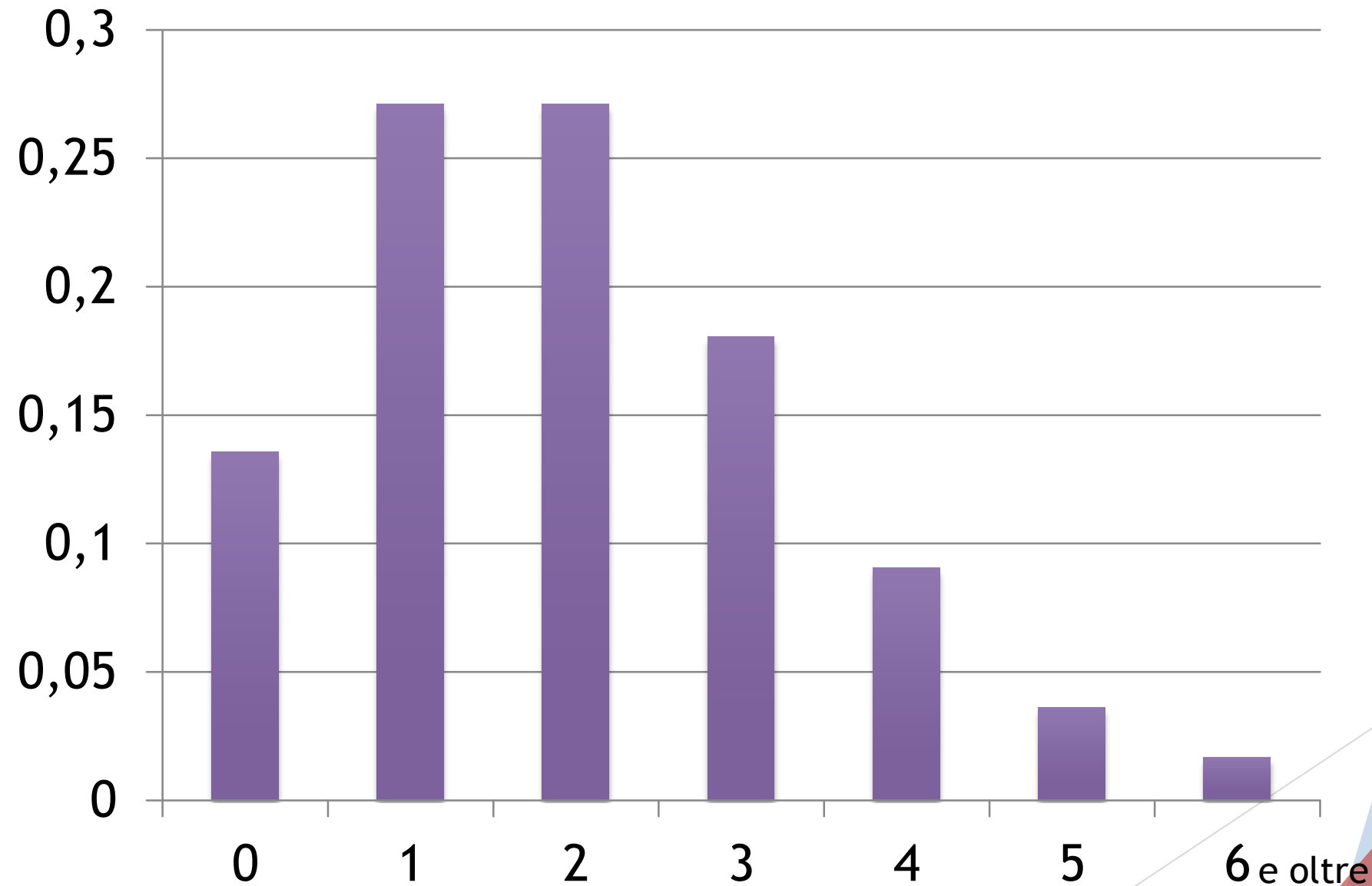
# ESEMPIO DI VARIABILE DI POISSON

| $x$        | $P(x)$   |
|------------|----------|
| 0          | 0,13533  |
| 1          | 0,27067  |
| 2          | 0,27067  |
| 3          | 0,18044  |
| 4          | 0,09022  |
| 5          | 0,03608  |
| 6 e oltre  | 0,01659  |
| <b>TOT</b> | <b>1</b> |



Oltre un certo valore si scrive “e oltre” e si calcola il valore come differenza fra 1 e la somma delle probabilità precedenti

# ESEMPIO DI VARIABILE DI POISSON



# ESEMPIO DI VARIABILE DI POISSON

I momenti della variabile di Poisson sono:

- $M(x) = 2$
- $V(x) = 2$
- $E(x) = \sqrt{2}$

# ESEMPIO 2 DI VARIABILE DI POISSON

In un casello autostradale, fra le ore 10:00 e le 12:00, passano in media 2,5 auto al minuto.

Calcolare con una opportuna v.c. la probabilità che in un minuto:

- 1) non passino auto
- 2) passino esattamente 2 auto
- 3) passino al più 4 auto
- 4) passino più di 4 auto

## ESEMPIO 2 DI VARIABILE DI POISSON

$$P(x) = \frac{e^{-m} m^x}{x!}$$

Nel nostro caso  $m=2,5$  e quindi :

$$P(x) = \frac{e^{-2,5} 2,5^x}{x!}$$

con  $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

# ESEMPIO 2 DI VARIABILE DI POISSON

1) Non passino auto, quindi  $x=0$ :

$$P(0) = \frac{e^{-2,5} 2,5^0}{0!} = 0,082$$

## ESEMPIO 2 DI VARIABILE DI POISSON

2) Passino esattamente 2 auto, quindi  $x=2$ :

$$P(2) = \frac{e^{-2,5} 2,5^2}{2!} = 0,2565$$

## ESEMPIO 2 DI VARIABILE DI POISSON

3) Passino al più 4 auto, quindi  $x \leq 4$ :

$$P(1) = \frac{e^{-2,5} 2,5^1}{1!} = 0,205 \quad P(3) = \frac{e^{-2,5} 2,5^3}{3!} = 0,2138$$

$$P(4) = \frac{e^{-2,5} 2,5^4}{4!} = 0,13346$$

Perciò  $P(x \leq 4) = 0,082 + 0,2052 + 0,2565 + 0,2138 + 0,13346 =$   
 **$= 0,8912$**

# ESEMPIO 2 DI VARIABILE DI POISSON

4) Passino più di 4 auto, quindi  $x > 4$ :

$$P(x > 4) = 1 - 0,8912 = 0,1088$$

# LA VARIABILE GEOMETRICA

La v.c. **Geometrica** descrive il numero di insuccessi  $x$  necessari affinché l'evento si verifichi la prima volta.

# LA VARIABILE GEOMETRICA

$$P(x) = pq^x$$

con  $x = 0, 1, 2, 3, \dots$

dove:

$p$  = probabilità che si verifichi l'evento,  
costante in ogni prova

$$q = 1 - p$$

$x$  = n° di prove/insuccessi che si devono  
sopportare prima di ottenere il 1° successo

# LA VARIABILE GEOMETRICA

I momenti della variabile Geometrica sono:

- $M(x) = \frac{q}{p}$
- $V(x) = \frac{q}{p^2}$
- $E(x) = \frac{\sqrt{q}}{p}$

# ESEMPIO DI VARIABILE GEOMETRICA

La probabilità per uno studente molto bravo di superare l'esame di statistica è del 90% in ogni prova.

Descrivere con una opportuna v.c. il numero di insuccessi che lo studente deve sopportare prima di superare l'esame.

# ESEMPIO DI VARIABILE GEOMETRICA

$$P(x) = pq^x$$

Nel nostro esempio  $p = 0,9$  e  $q = 0,1$ :

$$P(x) = 0,9 \cdot 0,1^x$$

con  $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

# ESEMPIO DI VARIABILE GEOMETRICA

Iniziando da  $x=0$ :

$$P(0) = 0,9 \cdot 0,1^0 = 0,9$$

Lo studente ha il 90% di probabilità di dover sopportare 0 insuccessi ovvero di superare l'esame al primo tentativo

# ESEMPIO DI VARIABILE GEOMETRICA

Procedendo:

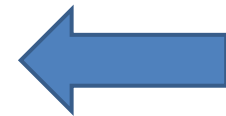
$$P(1) = 0,9 \cdot 0,1^1 = 0,09$$

$$P(2) = 0,9 \cdot 0,1^2 = 0,009$$

...

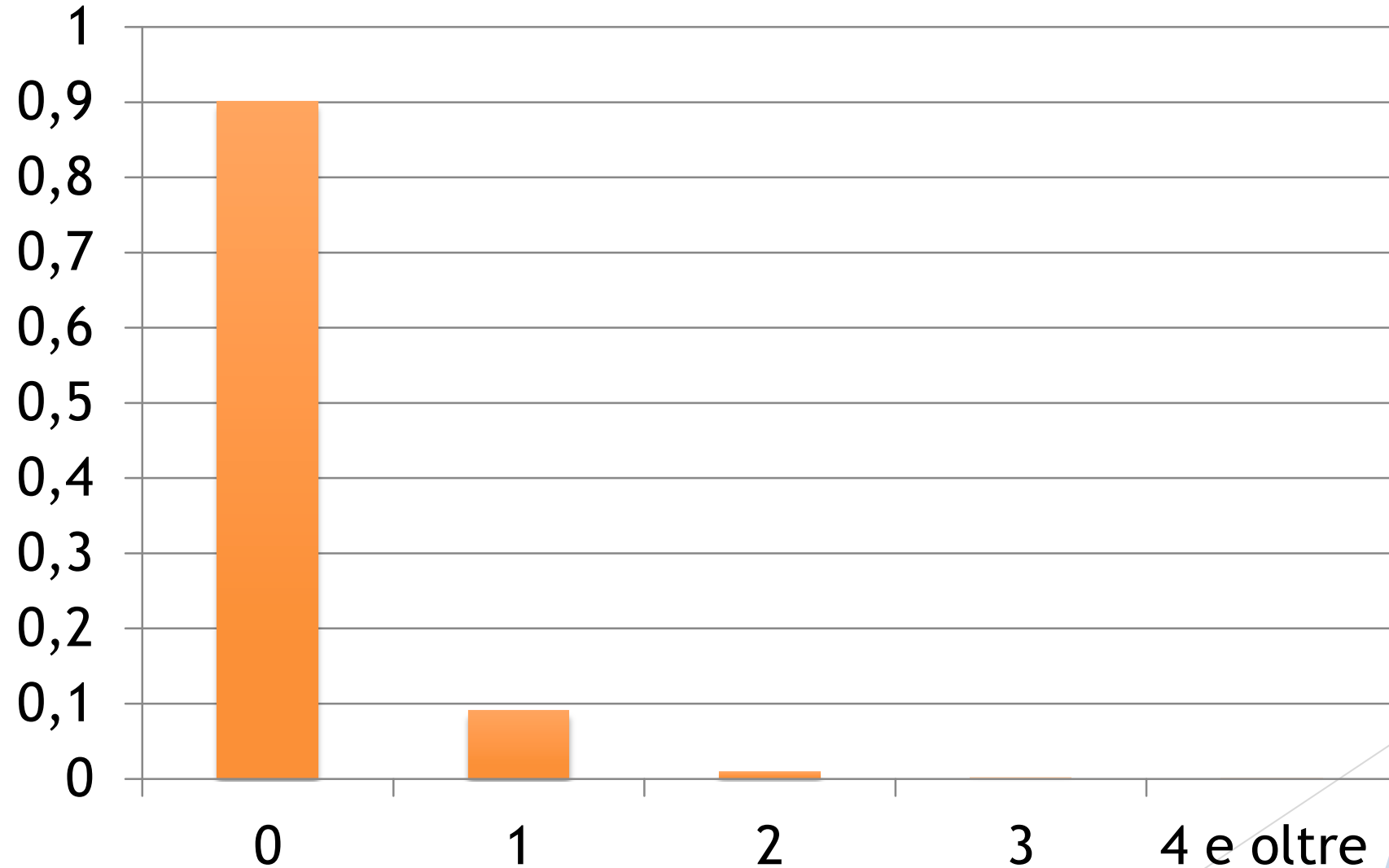
# ESEMPIO DI VARIABILE GEOMETRICA

| $x$        | $P(x)$   |
|------------|----------|
| 0          | 0,9      |
| 1          | 0,09     |
| 2          | 0,009    |
| 3          | 0,0009   |
| 4 e oltre  | 0,0001   |
| <b>TOT</b> | <b>1</b> |



Anche qui oltre un certo valore si scrive “e oltre” e si calcola il valore come differenza fra 1 e la somma delle probabilità precedenti

# ESEMPIO DI VARIABILE GEOMETRICA



# ESEMPIO DI VARIABILE GEOMETRICA

I momenti sono:

- $M(x) = \frac{q}{p} = 0,1111$
- $V(x) = \frac{q}{p^2} = 0,12345679$
- $E(x) = \frac{\sqrt{q}}{p} = 0,3514$

## ESEMPIO 2 DI VARIABILE GEOMETRICA

Riprendendo l'esempio usato per la v.c. binomiale della pallina rossa, supponendo che la probabilità di estrarre da un'urna con reinserimento una pallina rossa sia del 40%, descrivere con una opportuna v.c. il n° di insuccessi che si devono sopportare prima di estrarre una pallina rossa.

# ESEMPIO DI VARIABILE GEOMETRICA

$$P(x) = pq^x$$

Nel nostro esempio  $p = 0,4$  e  $q = 0,6$ :

$$P(x) = 0,4 \cdot 0,6^x$$

con  $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

# ESEMPIO 2 DI VARIABILE GEOMETRICA

Calcoliamo:

$$P(0) = 0,4 \cdot 0,6^0 = 0,4$$

$$P(1) = 0,4 \cdot 0,6^1 = 0,24$$

...

# ESEMPIO 2 DI VARIABILE GEOMETRICA

| $x$        | $P(x)$   |
|------------|----------|
| 0          | 0,4      |
| 1          | 0,24     |
| 2          | 0,144    |
| 3          | 0,0864   |
| 4 e oltre  | 0,1296   |
| <b>TOT</b> | <b>1</b> |

# ESEMPIO 2 DI VARIABILE GEOMETRICA

I momenti sono:

- $M(x) = \frac{q}{p} = 1,5$

- $V(x) = \frac{q}{p^2} = 3,75$

- $E(x) = \frac{\sqrt{q}}{p} = 1,93649$