Diario del corso di Analisi Matematica 3

G. Orlandi

a.a. 2010-11

Vengono qui di seguito elencati gli argomenti trattati a lezione. Il diario servirà anche per definire il programma d'esame.

Lezione del 6/10/10 (2 ore). Richiami sui numeri complessi: parte reale, parte immaginaria, somma, prodotto, coniugio, prodotto scalare, modulo, argomento, argomento principale, rappresentazione cartesiana, matriciale ($z \equiv a + ib \equiv aI + bJ$, $i^2 = -1$, $J^2 = -I$), rappresentazione polare ($z = |z|e^{i\arg(z)}$). Radici e formula di De Moivre. Il problema di trovare un dominio di definizione "globale" per la funzione radice k-esima: superfici di Riemann a più fogli. Proiezione stereografica $z_\pm : \mathbb{S}^2 \setminus \{\pm e_3\} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, (con $z_- = (\overline{z}_+)^{-1}$), punto all'infinito, sfera di Riemann $\mathbb{S}^2 \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Lezione dell'8/10/10 (2 ore). Descrizione dello spazio proiettivo complesso $\mathbb{CP}^n$ mediante coordinate omogenee. In particolare, $\mathbb{CP}^1 = \{[z,w],\ (z,w) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}\}$, dove $[z,w] = [\lambda \cdot z, \lambda \cdot w]$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Le carte coordinate $z \mapsto [z,1]$ e $w \mapsto [1,w]$, con la trasformazione di coordinate $w = z^{-1}$, costituiscono un atlante di $\mathbb{CP}^1$. Identificazione tra la sfera di Riemann e $\mathbb{CP}^1$.

Funzioni elementari: polinomi, funzioni razionali. Serie di potenze complesse, cerchio di convergenza. Esponenziale complesso e^z. Funzioni trigonometriche complesse $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$. Logaritmo $\log z = \log|z| + i\arg(z)$. Superficie di Riemann del logaritmo.

Notazioni per le funzioni complesse $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$: $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, con $u, v : A \to \mathbb{R}$. In virtù della relazione $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, si pone anche $f(x+iy) = f(z,\bar{z}) = u(z,\bar{z}) + iv(z,\bar{z})$.

Derivabilità in senso complesso, funzioni olomorfe. Derivabilità delle funzioni elementari.

Lezione del 13/10/10 (2 ore). Regole di derivazione per le funzioni olomorfe. Funzioni intere. Funzioni olomorfe ed equazioni di Cauchy-Riemann. Interpretazione geometrica: se $f = u + iv$ allora $\nabla v \perp \nabla u$ (ossia gli insiemi di livello di u sono ortogonali a quelli di v), e la matrice jacobiana $Df = \frac{\partial u}{\partial x} I + \frac{\partial v}{\partial x} J$ è una trasformazione conforme (dato che nella rappresentazione matriciale dei numeri complessi, si ha $Df \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = f'$, detto $\theta = \arg f'$, Df risulta essere la composizione di una rotazione antioraria di angolo θ e di una dilatazione di ampiezza $|f'|$) che preserva l'orientazione su $\mathbb{R}^2$ (ossia $\det Df = |f'| \geq 0$). Funzioni armoniche. Se $f = u + iv$ è olomorfa, allora u e v sono funzioni armoniche, in particolare v è detta l'armonica coniugata di u. Operatori $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}$ e $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$. Rispetto alle variabili coniugate $z, \bar{z}$ le equazioni di Cauchy-Riemann si scrivono $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, ossia una funzione olomorfa si può esprimere in funzione della sola z.

Lezione del 15/10/10 (1 ora). Integrali di cammino per funzioni complesse. Data $f : A \subset \mathbb{C} \to C$ e $\gamma : [a, b] \to A \subset \mathbb{C}$ una curva parametrizzata di classe C^1 a tratti, si definisce $\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)dt$ (dove $\cdot$ è il prodotto complesso). Proprietà: indipendenza dalla parametrizzazione (a meno dell'orientazione), linearità rispetto ad f, additività rispetto alla curva. Se $z = x + iy$ ed $f = u + iv$, si ha $\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma udy + vdx$. Definiamo il campo di vettori $\vec{E} = (u, -v)$. Detto τ il versore tangente a γ e ν il versore normale (rotazione oraria di τ), si ha $\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma < \vec{E}, \tau > ds + i\int_\gamma < \vec{E}, \nu > ds$. Vale la maggiorazione

$$|\int_\gamma f(z)dz| \leq \int_\gamma |f(z)|\,|dz| \leq \sup_A |f| \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|dt = ||f|||_{\ell^\infty(A)}|\gamma|,$$

dove $|\gamma|$ indica la lunghezza della curva γ.

Curve semplici, chiuse, curve di Jordan. Teorema delle curve di Jordan: detta $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ una curva continua, semplice, chiusa, esistono $A, B \subset \mathbb{R}^2$ aperti, tali che $\Gamma = \partial A = \partial B$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B \cup \Gamma = \mathbb{R}^2$.

Teorema fondamentale del calcolo per integrali di cammino: se $f = g'$, allora $\int_\gamma f(z)dz = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a))$.

Teorema: f olomorfa $\Rightarrow$ la forma differenziale $f(z)dz$ è chiusa. Infatti, se f è olomorfa, che $f(z)dz = udx - vdy + i(udy + vdx)$ sia chiusa segue dalle equazioni di Cauchy-Riemann. Nelle variabili coniugate $z, \bar{z}$ si ha $d(f(z)dz) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz = 0$.

Teorema di Cauchy - Goursat: $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa $\Rightarrow$ per ogni curva di Jordan $\gamma = \partial D$ C^1 a tratti, con $D \subset A$ si ha $\oint_\gamma f(z)dz = 0$. Dimostrazione nel caso f di classe C^1: per il Teorema di Stokes (alias Teorema di Gauss- Green nel piano), $\oint_{\partial D} f(z)dz = \int_D d(f(z)dz) = 0$.

Lezione del 20/10/10 (2 ore). Formula integrale di Cauchy e conseguenze: analiticità delle funzioni olomorfe. Stime di Cauchy per le derivate di una funzione olomorfa, Teorema di Liouville, Teorema fondamentale dell'algebra. Teorema di Morera. Proprietà della media.

Lezione del 22/10/10 (2 ore). Teorema del massimo modulo. Limite uniforme di funzioni olomorfe. Operatore risolvente, analiticità e formula integrale di Cauchy per operatori (cenni). Teorema degli zeri delle funzioni olomorfe.

Lezione del 29/10/10 (2 ore). Ordine di uno zero. Principio di continuazione analitica. Classificazione delle singolarità isolate di una funzione olomorfa: singolarità eliminabili, poli, singolarità essenziali.

Lezione del 3/11/10 (2 ore). Sviluppi in serie di Laurent. Formula dei residui. Alcuni metodi di calcolo dei residui per singolarità di tipo polo.

Lezione del 5/11/10 (2 ore). Residuo all'infinito. Teorema globale dei residui. Lemma dell'arco di cerchio grande. Calcolo di integrali impropri su $\mathbb{R}$.

Lezione del 10/11/10 (2 ore). Lemma di Jordan. Integrali nel senso del valor principale. Lemma del cerchio piccolo per funzioni con poli semplici reali. Integrali di funzioni razionali di $\cos\theta$ e $\sin\theta$.

Lezione del 12/11/10 (2 ore). Esercizi sul calcolo di integrali definiti mediante il calcolo dei residui. Integrali del tipo $\int_0^{+\infty} x^{-p} f(x)\, dx$ con $0 < p < 1$.

Lezione del 17/11/10 (2 ore). Calcolo di integrali del tipo $\int_0^{+\infty} f(x) \log x\, dx$. Calcolo della somma di serie numeriche mediante il calcolo dei residui.

Lezione del 19/11/10 (2 ore). Principio del minimo modulo. Teorema dell'applicazione aperta. Indice di avvolgimento. Formula integrale di Cauchy e del teorema dei residui per circuitazioni lungo curve chiuse (non necessariamente di Jordan). Principio dell'argomento. Applicazione: teorema fondamentale dell'algebra.

Lezione del 24/11/10 (2 ore). Teorema di Rouché. Applicazione alla determinazione del numero di radici di un polinomio in una data regione. Teorema di Hurwitz. Esercizi sul principio dell'argomento.

Lezione del 26/11/10 (2 ore). Trasformazioni conformi nel piano. Relazione con le funzioni olomorfe e le funzioni armoniche. Proprietà: conservazione delle frontiere. Il Teorema di Riemann di classificazione conforme degli aperti semplicemente connessi di $\mathbb{C}$ (o della sfera di Riemann). Condizioni per l'unicità di una trasformazione conforme tra due aperti semplicemente connessi conformemente equivalenti al disco unitario: condizione dei tre punti di frontiera, condizione sul punto interno e sull'argomento della derivata in quel punto.Trasformazioni di Möbius: proprietà (trasformazione di circonferenze in circonferenze, trasformazione di coppie di punti inversi rispetto ad una circonferenza in coppie di punti inversi rispetto alla circonferenza immagine), esempi (trasformazioni del disco unitario in sè, trasformazione del disco unitario in un semipiano).

Lezione del 1/12/10 (2 ore). Il problema di Dirichlet in domini semplicemente connessi del piano. Problemi ben posti. Principio del massimo e conseguenze: unicità e stabilità (dipendenza continua) rispetto ai dati al contorno. Il problema di Dirichlet nel cerchio. Risoluzione mediante separazione di variabili. La serie converge nell'interno del cerchio ad una soluzione sotto condizioni miti sul dato al bordo g (ad esempio, $\int_0^{2\pi} |g(\theta)|\,d\theta < +\infty$), in virtù dell'effetto regolarizzante dell'operatore di Laplace. Rappresentazione integrale della soluzione u con dato al bordo $g(\phi)$ via nucleo di Poisson per il cerchio: se il raggio del cerchio è a, si ha

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta - \phi)} g(\phi)\,d\phi\,.$$

La rappresentazione integrale fornisce una nozione naturale di soluzione generalizzata valida per dati al bordo non regolari.

Lezione del 3/12/10 (2 ore). Risoluzione del problema di Dirichlet in domini semplicemente connessi via Teorema della mappa di Riemann. Sia u la soluzione del problema di Dirichlet su D con dato al bordo g su ∂D. Fissato $z_0 \in D$ si consideri una trasformazione conforme $w = f(z, z_0) : D \to B \equiv \{|w| \le 1\}$ tale che $f(z_0, z_0) = 0$. Detta $U(w) = U(f(z, z_0)) = u(z)$, si ha che U risolve il problema di Dirichlet in B con dato al bordo $\tilde{g}(w) = \tilde{g}(f(z, z_0)) = g(z)$.

Consideriamo la funzione olomorfa $\log(f(z, z_0)) = \log w = \log|w| + i \arg w$, e sia $z \in \partial D$. Sia (τ, n) una base ortonormale di $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ con τ tangente a ∂D (e verso antiorario) e n la normale esterna a D in $z \in \partial D$. Senza perdita di generalità possiamo supporre che per quel fissato $z \in \partial D$ si abbia $(n, \tau) \equiv (e_1, e_2)$, la base canonica di $\mathbb{R}^2$. In particolare, essendo $\log w = \log(f(z, z_0))$ olomorfa, valgono le relazioni di Cauchy-Riemann

$$0 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \log w = \frac{\partial}{\partial n} \log w + i \frac{\partial}{\partial \tau} \log w$$

ovvero

$$\frac{\partial}{\partial n} \log|w| = \frac{\partial}{\partial \tau} \arg w\,.$$

Si parametrizzi ora $w \in \partial B$ ponendo $w = e^{i\psi}$, $0 \le \psi \le 2\pi$ ($\equiv \psi = \arg w$). In particolare, $\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial n}\log|w| = \frac{\partial}{\partial n}\log|f(z, z_0)|$. Per la proprietà della media, vale

$$\begin{aligned} u(z_0) = U(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{g}(e^{i\psi})d\psi = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} g(z)\frac{\partial \psi}{\partial \tau}d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} g(z)\frac{\partial}{\partial n}\log|f(z, z_0)|d\tau\,. \end{aligned}$$

La funzione $G(z, z_0) = \log|f(z, z_0)| =Re\,[\log(f(z, z_0))]$ si dice funzione di Green per il Laplaciano relativamente al dominio D. Nel caso D sia il semipiano $\{\operatorname{Im} z > 0\}$, si ha ad esempio $f(z, z_0) = \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$, da cui $\log f(z, z_0) = \log(z - z_0) - \log(z - \bar{z}_0)$ e dato che su $\partial D =$Im $z = 0$ si ha $\frac{\partial}{\partial n} = -i\frac{\partial}{\partial x}$, si ottiene, ponendo $z = x + iy$ e $z_0 = x_0 + iy_0$,

$$\frac{\partial G}{\partial n}(x, 0, x_0, y_0) = -i\left[\frac{1}{x - z_0} - \frac{1}{x - \bar{z}_0}\right] = \frac{1}{i}\frac{z_0 - \bar{z}_0}{(x - x_0)^2 + y_0^2} = \frac{2y_0}{(x - x_0)^2 + y_0^2}\,.$$

si deduce la formula di rappresentazione integrale della soluzione u con dato al bordo $u(x,0) = g(x)$ attraverso il nucleo di Poisson per il semipiano $y > 0$:

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y_0}{(x - x_0)^2 + y_0^2} g(x) dx \,.$$

Nel caso in cui $D = B(0,a)$, si considera $f(z, z_0) = a \frac{z - z_0}{z\bar{z}_0 - a^2}$. Posto $z_0 = re^{i\theta}$, $z = ae^{i\phi}$, su $\partial B(0,a)$ si ha $\frac{\partial}{\partial n} = -i\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial \phi}$ e $d\tau = ad\phi$ (per cui in particolare $\frac{\partial \zeta}{\partial \tau} d\tau = \frac{\partial \zeta}{\partial \phi} d\phi$ per ogni funzione ζ). Essendo $\log f(z, z_0) = \log a + \log(z - z_0) - \log(z\bar{z}_0 - a^2)$, si ricava

$$\begin{aligned} -i\frac{\partial}{\partial \phi} \log f(z, z_0) &= -i\left[\frac{iae^{i\phi}}{ae^{i\phi} - z_0} - \frac{ie^{i\phi}\bar{z}_0}{e^{i\phi}\bar{z}_0 - a}\right] \\ &= \frac{(z_0\bar{z}_0 - a^2)e^{i\phi}}{(-a^2 - z_0\bar{z}_0)e^{i\phi} + az_0 + a\bar{z}_0 e^{i2\phi}} \\ &= \frac{a^2 - r^2}{r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta - \phi)} \,. \end{aligned}$$

Si riottiene così la formula di rappresentazione integrale per la soluzione attraverso il nucleo di Poisson per il cerchio.

In generale, dato un dominio chiuso $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con frontiera di classe C^1 a tratti, la soluzione del problema di Dirichlet relativo ad un dato al bordo $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ si rappresenta come

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} g(y) \nabla_y G(x, y) \cdot \nu \, d\sigma(y) \,,$$

dove $d\sigma$ è l'elemento di superficie, ν è la normale esterna a $\partial\Omega$, e la funzione $G(x,y)$, definita per $x, y \in \Omega$, $x \neq y$, è detta funzione di Green relativa ad Ω. Detta $\Gamma(z)$, per $z \in \mathbb{R}^n$ la soluzione fondamentale del Laplaciano in $\mathbb{R}^n$ (ovvero Γ è il potenziale elettrostatico/gravitazionale generato da una carica/massa unitaria puntiforme posta nell'origine: per $n = 2$ si ha $\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi} \log|z|$, per $n > 2$ si ha $\Gamma(z) = c_n^{-1}|z|^{2-n}$, con $\frac{c_n}{2-n} = |\partial B(0,1)|$ l'area $(n-1)$-dimensionale della superficie sferica $\{|z| = 1\} \subset \mathbb{R}^n$). La funzione di Green è quindi univocamente determinata dalle seguenti condizioni: $G(x,y) = \Gamma(x-y) + w(x,y)$ con $\Delta_y w(x,y) = 0$ in Ω, e $G(x,y) = 0$ per $y \in \partial\Omega$, ovvero $w(x,y) = -\Gamma(x-y)$ per $y \in \partial\Omega$ (l'unicità deriva dal fatto che la funzione $y \mapsto w(x,y)$ è soluzione di un problema di Dirichlet).

La formula di rappresentazione per la soluzione u del problema di Dirichlet si ottiene dalle identità di Green

$$\int_\Omega u\Delta v - v\Delta u = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}$$

ponendovi formalmente $v(y) = G(x,y)$, e osservando che $\Delta u = 0$ in Ω e $u = g$ su $\partial\Omega$. (In realtà ponendo $v = G_\epsilon(x,y) = \Gamma_\epsilon(x-y) + w(x,y)$ e passando al limite per $\epsilon \to 0$, dove Γ_ϵ è tale che $\Delta\Gamma_\epsilon(z) = 0$ per $|z| > \epsilon$ e $\Delta\Gamma_\epsilon(z) = \omega_n^{-1}\epsilon^{-n}$ per $|z| \leq \epsilon$, con ω_n il volume della palla unitaria in $\mathbb{R}^n$: si verifica che vale $G_\epsilon(x,y) = G(x,y)$ per $|x-y| \geq \epsilon$ (in particolare, per $y \in \partial\Omega$), e si ha

$$\begin{aligned}\int_\Omega u(y)\Delta_y G_\epsilon(x,y) = \int_\Omega u(y)\Delta_y \Gamma_\epsilon(x-y) = \int_{B(x,\epsilon)} u(y)\omega_n^{-1}\epsilon^{-n} \\ = u(\xi) \quad \text{per un certo } \xi \in B(x,\epsilon)\,,\end{aligned}$$

per il teorema della media integrale. Passando al limite per $\epsilon \to 0$ si ha $u(\xi) \to u(x)$.

La determinazione della funzione di Green per domini dalla geometria semplice si può ottenere mediante il metodo delle cariche immagini: posta una carica nel punto $x \in \Omega$ se ne pongono altre in punti opportuni esterni a Ω in modo che il potenziale generato dalla distribuzione risultante abbia la frontiera $\partial\Omega$ come insieme di livello (ossia $\partial\Omega$ risulti una superficie equipotenziale): nel caso del semipiano (rispettivamente, del semispazio) viene posta una carica di segno opposto nel punto simmetrico rispetto al bordo. Nel caso del cerchio (rispettivamente della palla), viene posta una carica di segno opposto (e intensità opportuna) nel punto inverso rispetto alla circonferenza (rispettivamente, alla sfera) che costituisce il bordo del dominio.

Lezione del 15/12/10 (2 ore). Trasformata di Fourier in L^1. Motivazioni: analisi in frequenza di segnali non periodici. Confronto formale con le serie di Fourier. Formula di inversione (sintesi o ricostruzione del segnale), discussione sulla sua validità. Proprietà della trasformata di Fourier: se $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora $||\hat{f}||_{L^\infty} \leq ||f||_{L^1}$ ed inoltre si ha $\hat{f}(\omega) \in C^0(\mathbb{R})$ e $\hat{f}(\omega) \to 0$ per $|\omega| \to +\infty$: sia infatti f_n una successione di funzioni semplici (a gradino) convergenti in media ad una certa $f \in L^1(\mathbb{R})$, allora $||\hat{f}_n - \hat{f}||_{L^\infty} \leq ||f_n - f||_{L^1} \to 0$, e vale $\hat{f}_n \in C^0$, $\hat{f}_n(\omega) \to 0$ per $|\omega| \to +\infty$, come si dimostra facilmente calcolando la trasformata della funzione caratteristica di un intervallo: posto $g(t) = 1$ per $|t| \leq a$ e $g(t) = 0$ per $|t| > a$, si ha $\hat{g}(\omega) = 2\frac{\sin(a\omega)}{\omega}$, ovvero $\hat{g} \in C^0(\mathbb{R})$ e $\hat{g}(\omega) \to 0$ per $|\omega| \to +\infty$.

La continuità di $\hat{f}$ discende immediatamente anche dal teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale via teorema di convergenza dominata di Lebesgue.

La trasformata di Fourier preserva il prodotto scalare L^2 (a meno di un fattore costante dipendente dalla definizione in uso): se $f, g \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ allora $f \cdot g \in L^1(\mathbb{R})$ e vale

$$\langle f, g\rangle_{L^2} = \int_\mathbb{R} f(t)g(t)\,dt = c\int_\mathbb{R} \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)\,d\omega = c\langle \hat{f}, \hat{g}\rangle_{L^2}\,,$$

dove il fattore c dipende dalla definizione di trasformata in uso. In particolare, vale il Teorema di Plancherel: $||f||_{L^2} = c||\hat{f}||_{L^2}$. Questo fatto permette di estendere la definizione di trasformata di Fourier a funzioni di $L^2(\mathbb{R})$ per densità: data $f \in L^2(\mathbb{R})$, e detta f_n una successione di funzioni semplici tali che $||f_n - f||_{L^2} \to 0$, si ha che f_n è di Cauchy in L^2, e dunque, per Plancherel, $\hat{f}_n$ è di Cauchy in L^2, che è completo, dunque esiste $g \in L^2(\mathbb{R})$ tale che $||\hat{f}_n - g||_{L^2} \to 0$. Ponendo $\hat{f} := g$, la trsformata di Fourier rimane definita su $L^2(\mathbb{R})$, dove costituisce un'isometria suriettiva (a meno di un fattore costante).

Lezione del 17/12/10 (2 ore). Trasformata di Fourier e ritardo, modulazione, parità, derivazione. Teorema di derivazione sotto il segno di integrale via convergenza dominata. Convoluzione. Trasformata di Fourier di un prodotto di convoluzione. Trasformata di Fourier di una gaussiana. Delta di Dirac e unità approssimate. Risoluzione dell'equazione del calore su $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$. Nucleo del calore.

Lezione del 12/1/11 (2 ore). Segnali causali. Funzione di Heaviside. Funzioni $\mathcal{L}$-trasformabili. Trasformata di Laplace. Ascissa di convergenza. La trasformata di Laplace è una funzione olomorfa nel semipiano di convergenza (via Teorema di derivazione sotto il segno di integrale o via Teorema di Morera). Trasformata della funzone di Heaviside. Relazione tra trasformata di Laplace e trasformata di Fourier. Formula di inversione di Riemann-Fourier. Formula di Heaviside per l'inversione di funzioni razionali.

Lezione del 14/1/11 (2 ore). Proprietà della trasformata di Laplace rispetto ad alcune operazioni: ritardo, modulazione, convoluzione, integrazione e derivazione. Trasformata della delta di Dirac δ_0. Teoremi del valore iniziale e finale. La delta di Dirac come derivata (nel senso delle distribuzioni) della funzione di Heaviside.Trasformata di segnali periodici. Applicazione alla risoluzione di problemi differenziali ai valori iniziali (anche con la presenza di termini impulsivi): funzione di trasferimento, soluzione fondamentale. Risoluzione di particolari equazioni integrali di Volterra con nucleo di convoluzione (ossia con filtro tempo-invariante).

Lezione del 19/1/11 (2 ore). Derivata della delta di Dirac (dipolo) e sua trasformata di Laplace. Equazioni differenziali nel senso delle distribuzioni. Risoluzione di alcune equazioni differenziali, integrali, integro-differenziali mediante trasformata di Laplace. Equazione di Bessel, funzione di Bessel J_0 e sua trasformata.

Lezione del 21/1/11 (2 ore). Segnali causali discreti. Trasformata zeta. Relazione con la trasformata di Laplace. Formula del ritardo. Regione di convergenza. Formula di inversione. Applicazione alla risoluzione di equazioni alle differenze.

Lezione del 26/1/11 (2 ore). Esercizi riepilogativi.

Bibliografia.

De Marco, *Analisi Matematica 2.*
Henrici, *Applied and computational Complex Analysis*, Wiley (1974).
Rudin, *Real and Complex Analysis*, Mc Graw-Hill (1970).
Spiegel, *Laplace Transforms*, collana Schaum, Mc Graw-Hill (1994).
Weinberger, *A first course in Partial Differential Equations*, Dover (1995).