Lidia Angeleri, Francesca Mantese
Università di Verona, 2010/11
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Introduzione alla teoria delle rappresentazioni di grafi
Prova scritta del 28 giugno 2011

1. Si determini il quiver di Auslander-Reiten dell'algebra dei cammini Λ del quiver

$$\overset{1}{\bullet} \leftarrow \overset{2}{\bullet} \rightarrow \overset{3}{\bullet} \rightarrow \overset{4}{\bullet}$$

(8 punti)

Inoltre

(a) si trovi una rappresentazione per il modulo τI_2;

(b) si determini la sequenza di Auslander-Reiten che termina con il modulo I_2;

(c) si verifichi che $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(S_3, S_3) = 0$.

(6 punti)

2. Sia R un anello e siano A, C due R-moduli. Si dia la definizione di $\mathrm{Ext}^1_R(C, A)$ come insieme delle classi di equivalenza di sequenze esatte corte e si descriva la struttura di gruppo su $\mathrm{Ext}^1_R(C, A)$. *(10 punti)*

3. Sono veri o falsi i seguenti enunciati su un'algebra di dimensione finita Λ?

(a) Dati due Λ-moduli A, C, si ha $\mathrm{Ext}^1_R(C, A) \cong \mathrm{Ext}^1_R(A, C)$.

(b) Il radicale di ogni Λ-modulo indecomponibile iniettivo è massimale.

(c) Ogni sottomodulo proprio di un Λ-modulo indecomponibile proiettivo è inessenziale.

(6 punti)

Lidia Angeleri, Francesca Mantese
Università di Verona, 2010/11
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Introduzione alla teoria delle rappresentazioni di grafi
Prova scritta del 27/9/2011

1. Si determini il quiver di Auslander-Reiten dell'algebra dei cammini Λ del quiver

$$\overset{1}{\bullet} \leftarrow \overset{2}{\bullet} \rightarrow \overset{3}{\bullet} \leftarrow \overset{4}{\bullet}$$

(8 punti)

Inoltre

(a) si trovi una rappresentazione per il modulo τI_2;
(b) si determini la sequenza di Auslander-Reiten che termina con il modulo I_2;
(c) si calcoli $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\tau^- P_1, \tau^- P_1)$.

(6 punti)

2. Sia R un'algebra di dimensione finita e sia A un R-modulo senza addendi proiettivi diversi da zero. Si dia la definizione del trasposto $\operatorname{Tr} A$ e si dimostri che $\operatorname{Tr}^2 A \cong A$.

(10 punti)

3. (a) Si trovino un quiver Q tale che sull'algebra dei cammini $\Lambda = KQ$ esiste un modulo proiettivo indecomponibile P il cui radicale $\operatorname{Rad}P$ non è indecomponibile.
(b) Per un modulo M su un anello R si dimostri: se M è indecomponibile di lunghezza $\ell(M) > 1$ e S è un suo sottomodulo semplice, allora S è un sottomodulo inessenziale di M.

(6 punti)