Prof. Lidia Angeleri
Università di Verona, 2008/2009
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Prova scritta per il Corso di ALGEBRA

29 giugno 2009

1. Si dia la definizione di gruppo risolubile. (*3 punti*)

2. Si enunci il Teorema di Kronecker. (*3 punti*)

3. Si decida se sono veri o falsi i seguenti enunciati.
   (a) Ogni estensione per radicali è di grado finito.
   (b) Il polinomio $x^5 + 15\,x^2 + 3$ è irriducibile su $\mathbb{Z}$.
   (c) Il polinomio $x^5 + x^2 + 1$ è irriducibile su $\mathbb{Z}$.
   (d) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]\,/(x^4 + x^2 + 1) \cong GF(16)$.

   (*8 punti*)

4. In $\mathbb{Q}[x]$ si considerino i polinomi
$$f(x) = x^4 - 16 \qquad g(x) = x^3 - 2\,x^2 - 4\,x + 8$$
   (a) Si dia la scomposizione in fattori irriducibili di f e di g.
   (b) Si determinino polinomi $h, k \in \mathbb{Q}[x]$ tali che
$$(f, g) = (h),\ (f) \cap (g) = (k).$$

   (*8 punti*)

5. Sia $F \subset \mathbb{C}$ il campo di riducibilità completa di $f = x^4 - 2$ su $\mathbb{Q}$.
   (a) Si verifichi che $F = \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$ e si determini $[F : \mathbb{Q}]$.
   (b) Si dimostri: $\mathrm{Gal}(F/\,\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e $\mathrm{Gal}(F/\,\mathbb{Q}(i)) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
   (c) Si decida se $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ è un gruppo abeliano.

   (*8 punti*)