Algebra

Corso di Laurea in Matematica Applicata
Anno accademico 2010-2011

Lidia Angeleri

Obiettivo 1

Data un'equazione di forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

con coefficienti $a_0, \ldots, a_n$ in un campo K,

costruire un'**estensione**

$$K \subset F$$

nella quale l'equazione abbia soluzione.

Obiettivo 1

Prototipo: $x^2 + 1 = 0$ sul campo $\mathbb{R}$ con l'estensione $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Costruzione:
- l'anello dei polinomi $\mathbb{R}[x]$
- l'anello quoziente $\mathbb{C} = \mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$

Obiettivo 2

Studiare estensioni di campi usando la teoria dei gruppi (e viceversa):

ad ogni estensione $K \subset F$ assegnamo un gruppo

$$G = \mathrm{Gal}(F/K)$$

detto **gruppo di Galois**.

Obiettivo 2

Teorema Fondamentale della Teoria di Galois:
Sia $K \subset F$ un'estensione finita, normale e separabile
e sia $G = \mathrm{Gal}(F/K)$ il suo gruppo di Galois.

Allora esiste una corrispondenza biunivoca
$\{$ i campi intermedi $K \subset L \subset F\} \to \{$ i sottogruppi $H \leq G\}$

Obiettivo 3

Risolubilità per radicali: Gli zeri di un polinomio

$$f = x^2 + a_1 x + a_0$$

di grado 2 su $\mathbb{Q}$ si determinano con una formula in cui intervengono solo le quattro operazioni e radici quadrate:

$$\alpha_1 = -\frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{{a_1}^2}{4} - a_0}, \quad \alpha_2 = -\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{{a_1}^2}{4} - a_0}$$

Obiettivo 3

Formule analoghe si hanno per i polinomi di grado 3 e 4.

Vedremo che ciò non vale per i polinomi di grado ≥ 5
(Teorema di Abel - Ruffini).

Conseguenze

Si dimostra che noti problemi classici **non** hanno soluzione.

Le seguenti costruzioni con riga e compasso sono **impossibili**:

- la quadratura del cerchio,
- la duplicazione del cubo,
- la trisezione dell'angolo.

Programma del Corso

- **Gruppi.** Sottogruppi, laterali, il gruppo quoziente. Gruppi ciclici. Il gruppo simmetrico. Gruppi risolubili.
- **Anelli.** Ideali. Omomorfismi. Domini a ideali principali, domini a fattorizzazione unica, anelli euclidei.
- **Polinomi.** L'anello dei polinomi. Polinomi irriducibili.
- **Campi.** Estensioni algebriche. Il campo di riducibilità completa di un polinomio.
- **Teoria di Galois.** Estensioni normali, estensioni separabili. Teorema Fondamentale della Teoria di Galois.
- **Applicazioni della Teoria di Galois.** Risolubilità per radicali. Costruzioni con riga e compasso.

Organizzazione del Corso

Filo rosso: sulla pagina del corso verrà pubblicato un diario delle lezioni con aggiornamento settimanale.

Bibliografia:

- S. Bosch, *Algebra*, Springer, Unitext 2003.
- I.N.Herstein, *Algebra*, Editori Riuniti 2003.
- J.P.Tignol, *Galois' Theory of Algebraic Equations*. World Scientific 2001.
- J.Derbyshire, *Unknown quantity. A real and imaginary history of algebra.* Plume 2006.

Organizzazione del Corso

Esercizi: le lezioni sono affiancate da esercitazioni che preparano alla prova scritta. Gli esercizi vengono

- assegnati settimanalmente
- **corretti individualmente** dal Dottor A. CUNEO
- discussi tutti i **giovedì, ore 14:30 - 15:30** durante l'ora di esercitazione.

Esame

L'esame consiste in una prova scritta. Il voto conseguito nella prova scritta pu essere migliorato attraverso il voto ottenuto per lo svolgimento degli esercizi e / o attraverso una prova orale facoltativa. Per potersi presentare all'orale è necessario aver superato la prova scritta.

Orario di ricevimento:
L. ANGELERI: mercoledì, ore 14:30-16:30,
oppure su appuntamento.