ELEMENTI DI TEORIA DELLE CONICHE

1. Introduzione

Questi appunti delle Lezioni di una parte del modulo di *Elementi di Geometria* per il corso di *Algebra Lineare con Elementi di Geometria*[1] sono basati sulle note [Spera–1, Spera–2] del prof. Spera che ha tenuto il corso dal 2006 al 2012.

In questo capitolo ci occuperemo dello studio delle sezioni coniche reali. Lavoreremo in gran parte nel piano proiettivo reale, che però, penseremo complessificato; ciò ci permetterà di interpretare più agevolmente particolari situazioni geometriche e darà maggior senso all'operazione di omogeneizzazione che altrimenti rimarrebbe un trucco matematico privo di significato. In alcune circostanze tratteremo anche coniche direttamente in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, tuttavia per iniziare è opportuno procedere in astratto.

2. Definizioni e costruzioni iniziali

Definizione. *Sia V un $\mathbb{K}$–spazio vettoriale di dimensione 3 e $\mathbb{P}(V)$ il corrispondente spazio proiettivo (di dimensione 2). Sia A una matrice simmetrica di dimensione 3, allora chiamiamo* **conica** *associata ad A l'insieme*

$$\mathcal{C} = \{\langle \vec{v} \rangle \in \mathbb{P}(V) \mid \vec{v} \neq \vec{0},\ \vec{v}^T A \vec{v} = 0\}.$$

A parole si può affermare che $\vec{v}$ deve essere isotropo per A o meglio che una conica consiste nelle generatrici del cono isotropo associato ad A. Lavorando in coordinate emerge che una conica è quindi il luogo dei punti (contati con le opportune molteplicità) $X = [x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2$ tali che

$$X^T A X = 0 \tag{1}$$

con $X = [x_0, x_1, x_2] \neq [0, 0, 0]$ e A matrice simmetrica 3×3. Esplicitamente la (1) si scrive

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = 0$$

cioè, sviluppando i calcoli

$$P(x_0, x_1, x_2) = a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0.$$

Una conica è individuata da un polinomio omogeneo di secondo grado in $x_0, x_1 x_2$.

N.B. Si osservi che il viceversa non è vero, infatti una conica $\mathcal{C}$ non individua un unico polinomio omogeneo di secondo grado in x_0, x_1, x_2, ma una classe di polinomi (omogenei di secondo grado) proporzionali. Precisamente due polinomi si dicono equivalenti se sono proporzionali e tale relazione è una relazione di equivalenza. Di conseguenza una conica è **identificata** da una classe di equivalenza di polinomi (omogenei di secondo grado) equivalenti.

Commento.
- *Tale idea si generalizza a polinomi omogenei di grado qualsiasi in $\mathbb{P}^2$, dando così origine alla teoria delle curve algebriche. Più in generale l'idea si generalizza a polinomi (omogenei) di grado n in spazi proiettivi di dimensione qualsiasi, dando origine alla teoria delle varietà algebriche.*
- *Abbiamo detto in precedenza che l'insieme dei punti X di $\mathbb{P}^2$ tali che $X^T A X = 0$ rappresenta il cosiddetto cono isotropo associato ad A. Questo fatto permette di recuperare l'idea classica (euclidea–apolloniana) che tutti i tipi di conica si ottengono mediante opportune sezioni di un cono a due falde. Rimandiamo ad altra sede per un approfondimento su questo tema.*

Date: 17 gennaio 2014.

[1] Corso di Studi in Matematica Applicata, Università degli Studi di Verona, A.A. 2012/2013.

Nel seguito e nelle applicazioni diremo indifferentemente che un polinomio $P(x_0, x_1, x_2)$ o un'equazione del tipo $a_{00}x_0^2+2a_{01}x_0x_1+2a_{02}x_0x_2+a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2 = 0$ definiscono una conica, spesso non sottolineando che il polinomio o l'equazione sono omogenei di secondo grado. Ciò è dovuto al fatto che passando a coordinate affini il polinomio (o l'equazione) associato alla conica non sono più omogenei, pur restando necessariamente di secondo grado.

Definizione. *Due coniche $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ si dicono (proiettivamente)* **equivalenti**, $\mathcal{C}_1 \overset{P}{\sim} \mathcal{C}_2$ *se le rispettive matrici associate sono congruenti, ossia se esiste un cambiamento di coordinate che trasforma A_1 in A_2,* [2] *a meno di una costante di proporzionalità.*

N.B. Notiamo come la nozione di conica sia invariante per trasformazioni proiettive, ossia per trasformazioni biettive dello spazio proiettivo in sè che conservano la struttura proiettiva. Accettiamo che esse sono rappresentate da matrici di $\mathrm{GL}_3(\mathbb{K})$. Posto infatti $X = MY$, con $M \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{K})$ si ha

$$X^T AX = (MY)^T A(MY) = Y^T \underbrace{M^T AM}_{:=B} Y = Y^T BY$$

sicché A è rimpiazzata dalla matrice ancora simmetrica $Y^T AY$ (**perché?**) ed essendo la conica determinata dai vettori isotropi, si ha che A e B danno luogo alla stessa conica.

3. Classificazione proiettiva delle coniche: approccio algebrico

3.1. **Caso complesso.** Una conica $\mathcal{C}$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ è individuata da

$$X^T AX = 0$$

con $X \neq [0, 0, 0]^T$ e A matrice simmetrica (a coefficienti reali). Se diagonalizziamo la matrice A la conica $\mathcal{C}$ si riscrive come

$$\Xi^T D\,\Xi = 0$$

con $\Xi \neq [0, 0, 0]^T$ e D matrice diagonale ottenuta da A tramite una trasformazione di coordinate $A = P^T DP$, con $P \in GL_3(\mathbb{C})$ matrice del cambiamento di coordinate. Da cui l'equazione della conica assume una forma semplice:

$$\alpha_0\xi_0^2 + \alpha_1\xi_1^2 + \alpha_2\xi_2^2 = 0.$$

Si ricordi che il rango è invariante per similitudine. Ciò permette di classificare le coniche nel seguente modo:

non degenere	**degenere**	**degenere**
$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 1$	$\alpha_0 = 0$ e $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$	$\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = 1$
rank $D = 3$	rank $D = 2$	rank $D = 1$
$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 = 0$	$\xi_1^2 + \xi_2^2 = 0$	$\xi_2^2 = 0$
conica irriducibile complessa	**conica riducibile complessa**	**conica riducibile complessa**
	spezzata in due rette complesse	spezzata in due rette coincidenti

N.B. Dunque dal punto di vista proiettivo, nel caso complesso vi è, *a meno di equivalenza proiettiva*, **un unico tipo di conica irriducibile**.

[2] Accettiamo il fatto che un cambiamento di coordinate ortogonali manda una matrice simmetrica in un'altra matrice simmetrica.

3.2. **Caso reale.**

non degenere		semplicemente degenere		doppiamente degenere
rank $A = 3$		rank $A = 2$		rank $A = 1$
$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 1$	$\alpha_0 = -1$ e $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$	$\alpha_0 = 0$ e $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$	$\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = -1$	$\alpha_0 = \alpha_2 = 0$ e $\alpha_2 = 1$
$\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 = 0$	$-\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 = 0$	$\xi_1^2 + \xi_2^2 = 0$	$\xi_1^2 - \xi_2^2 = 0$	$\xi_2^2 = 0$
	sgn$(D) = (2, 1)$ **oppure** $(1, 2)$			
conica priva di punti reali	**conica irriducibile reale**	**un punto**	**coppia di rette incidenti**	**coppia di rette coincidenti**

N.B. Dunque dal punto di vista proiettivo, nel caso reale vi è, *a meno di equivalenza proiettiva*, **un unico tipo di conica irriducibile a punti reali**. Essa corrisponde ad una segnatura di tipo (2,1) o (1,2).

4. Sulle coniche degeneri

Da quanto visto nella sezione precedente se la matrice A associata alla conica $\mathcal{C}$ ha determinante nullo, cioè se $\mathfrak{a} := \det A = 0$, allora la conica è degenere: spezzata in due rette (che possono essere incidenti[3] o coincidenti). Determiniamo esplicitamente le due rette: consideriamo il polinomio di secondo grado non omogeneo associato a $\mathcal{C}$, passiamo cioè a coordinate affini e poi leggiamo tale polinomio come un polinomio di secondo grado in x a coefficienti funzioni di y:

$$P(x) = a_{00} + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2.$$

Il fatto che $\mathfrak{a} = 0$ assicura che il discriminante di $P(x)$ sia un quadrato e quindi il polinomio si fattorizza: Perché?

$$P(x) = \underbrace{(\alpha' x + \beta' y + \gamma')}_{r'}\,\underbrace{(\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'')}_{r''}.$$

In simboli $\mathcal{C} :\ r'\, r'' = 0$ e i singoli fattori danno le componenti di $\mathcal{C}$.

Esempio 1. *Verificare che la conica definita dal polinomio $P(x_0, x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 + x_1x_0 + x_0x_2$ è degenere e determinare le rette che la compongono.*

Sol. In primo luogo passiamo a coordinate non omogenee, l'equazione di $\mathcal{C}$ allora diventa

$$x^2 - y^2 + x + y = 0 \tag{2}$$

e la matrice $A_{\mathcal{C}}$ associata a $\mathcal{C}$ è

$$A_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Osserviamo che $\mathfrak{a} = 0$.

$$\det A_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\det \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Quindi la conica è degenere. Determiniamo ora le rette in cui si spezza. L'equazione di $\mathcal{C}$ assume la forma

$$(x - y)(x + y) + x + y = 0$$
$$(x + y)(x - y + 1) = 0$$

La conica $\mathcal{C}$ si spezza nel prodotto delle due rette $r :\ x + y = 0$ e $r' :\ x - y + 1 = 0$.

[3] Si ricordi che nel piano proiettivo due rette sono sempre incidenti, quindi non si distingue il caso in cui le due rette possono essere parallele e non coincidenti.

Verifichiamo ora che il discriminante della (2), letta come equazione in x a coefficienti funzioni di y è un quadrato. Infatti

$$\Delta = 1 - (y - y^2) = 1 - 4y + 2y^2 = (2y - 1)^2.$$

5. Tangente ad una conica proiettiva

Sviluppiamo un approccio diretto, cioè senza ricorrere all'analisi. Sia $\mathcal{C}: \ X^T AX = 0$ una conica irriducibile (cioè rank $A = 3$). Sia $P_0 = [X_0]$ un punto della conica[4], allora $X_0^T AX_0 = 0$. Sia ora r una generica retta passante per P_0, r avrà equazioni parametriche $X = X_0 + \lambda\,\vec{\ell}$, con $\vec{\ell} = [0, \ell_1, \ell_2]^T \neq [0, 0, 0,]^T$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. In generale r incontrerà la conica in P_0 e in un altro punto $P_1 = [X_1]$.[5] **La retta r è tangente la conica $\mathcal{C}$ in P_0 se P_1 coincide con P_0, cioè se $\lambda = 0$ è radice doppia dell'equazione**

$$0 = (X_0 + \lambda\vec{\ell})^T A(X_0 + \lambda\vec{\ell}) = \underbrace{X_0^T AX_0}_{=0} + \lambda\,(\vec{\ell}^{\,T} AX_0 + X_0 A\vec{\ell}\,) + \lambda^2\,\vec{\ell}^{\,T} A\vec{\ell} = 2\lambda\, X_0^T A\vec{\ell} + \lambda^2 \vec{\ell}^{\,T} A\vec{\ell}$$

Osserviamo che $\vec{\ell}^{\,T} A\vec{\ell} \neq 0$, infatti se non lo fosse la retta r sarebbe interamente contenuta in $\mathcal{C}$, ovvero r costituirebbe una delle due rette, eventualmente coincidenti, in cui si spezza la conica. Di conseguenza $\lambda = 0$ è radice doppia se e solo se $X_0^T A\vec{\ell} = 0$ e quindi

$$X_0^T A(X - X_0) = 0^6$$

ovvero

$$\mathbf{X_0^T AX = 0} \qquad \textbf{equazione della retta tangente a } \mathcal{C} \textbf{ in } P_0\textbf{.}$$

6. Polarità definita da una conica irriducubile

Consideriamo ancora l'equazione

$$X_0^T AX = X^T AX_0^T = 0$$

ma con $P_0 = [X_0]$ arbitrario in $\mathbb{P}^2$. **Essa rappresenta l'equazione di una retta p_0 detta POLARE di P_0 rispetto a $\mathcal{C}$. Si noti che, dal punto di vista vettoriale stiamo determinando $\langle X_0\rangle^{\perp_A}$. È chiaro che $P_0 \in p_0$ se e solo se p_0 è tangente a $\mathcal{C}$ in P_0.**

Enunciamo ora il seguente **risultato molto importante**.

Teorema 1 (Principio di reciprocità). *Siano $P_0, P_1 \in \mathbb{P}^2$ e siano p_0 e p_1 le rispettive polari rispetto ad una stessa conica irriducibile $\mathcal{C}$. Allora*

$$P_0 \in p_1 \iff P_1 \in p_0.$$

Dimostrazione. Discende immediatamente dalla simmetria di A, infatti

$$0 = X_0^T AX_1 = X_1^T AX_0.$$

□

Il principio di reciprocità ha la seguente importante conseguenza

Teorema 2. *Sia $\mathcal{C}$ una conica irriducibile in $\mathbb{P}^2$ e P un punto in $\mathbb{P}^2$. Detti $P_1, P_2 \in \mathcal{C}$ i punti di contatto delle tangenti condotte da $P \in \mathbb{P}^2$,[7] la retta $p = P_1P_2$ è la polare di P, inoltre se $P \in \mathcal{C}$ allora p è tangente a $\mathcal{C}$ in P.*

Dimostrazione. Si osservi che $P \in \tau_1$ e $P \in \tau_2$, quindi per il principio di reciprocità $P_1 \in p$ e $P_2 \in p$. Essendo $P_1 \neq P_2$ si ha che $p = P_1P_2$. (Si veda Figura 1).

□

Osservazione.
- Se P è interno a $\mathcal{C}$ (caso reale), la polare p si può determinare tracciando due rette distinte r_1 e r_2 per P e conducendo dai rispettivi punti di intersezione con la conica le tangenti a $\mathcal{C}$. Queste si incontreranno in due punti distinti che, congiunti, determineranno la polare p cercata. Inoltre si noti che r_1 è la polare di P_1 e r_2 di P_2. (Si veda Figura 2).

[4] Si ricordi che allora $X_0 = [x_0^0, x_1^0, x_2^0] \neq [0, 0, 0,]$.

[5] Come noto, ponendo a sistema l'equazione della conica con quella della retta si ottiene un'equazione di secondo grado in λ, che per $\lambda = 0$ ha una radice, quella corrispondente al punto P_0.

[6] Si usa il fatto che $\lambda\vec{\ell} = X - X_0$

[7] Nel caso reale se le due rette risultano complesse coniugate, si dice che il punto P è interno alla conica.

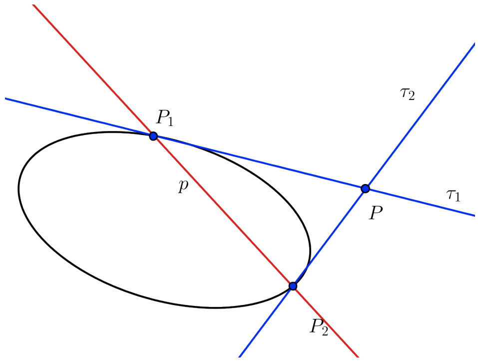

FIGURA 1.

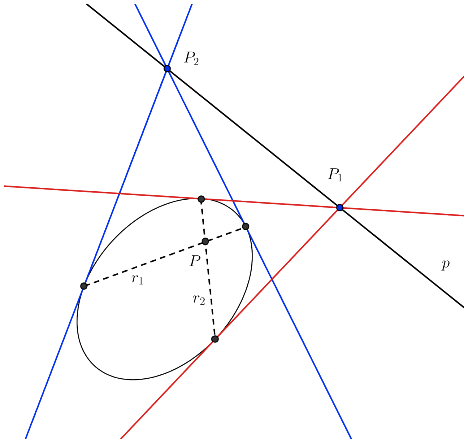

FIGURA 2. Costruzione della polare se il punto P è interno a $\mathcal{C}$

Determinazione delle tangenti ad una conica condotte da P generico. Per determinare le tangenti ad una conica (irriducibile) $\mathcal{C}$ condotte da un punto (esterno) $P \in \mathbb{P}^2$ si può procedere in tre modi diversi. Il terzo e più elegante di questi modi è rinviato alla fine della sezione sui fasci di coniche (si veda 7.2).

Metodo 1. Si scrive l'equazione del fascio di rette di centro P e si impone che i punti di intersezione di tali rette con $\mathcal{C}$ coincidano.[8]

Metodo 2. Si può determinare la polare p del punto P e quindi i punti P_1 e P_2 di intersezione di tale retta con la conica $\mathcal{C}$. Le due tangenti saranno allora le retta $\tau_1 : P_1P = 0$ e la retta $\tau_2 : P_2P = 0$, passanti rispettivamente per P_1 e P e per P_2 e P.

Metodo 3. Si rinvia alla fine della Sezione 7.2

7. Fasci di coniche in $\mathbb{P}^2$

Si considerino in $\mathbb{P}^2$ due coniche distinte $\mathcal{C}'$ e $\mathcal{C}''$

$$X^T A' X = 0$$

$$X^T A'' X = 0$$

con $A' = (a'_{ij})$ e $A'' = (a''_{ij})$ matrice associate alle coniche. Per ogni coppia di numeri reali $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ definiamo la conica

$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}} : \lambda X^T A' X + \mu X^T A'' X = 0 \tag{3}$$

[8] È il metodo noto dalle scuole superiori: si sostituisce l'equazione del fascio in quella della conica e imponendo l'annullarsi del discriminante dell'equazione ottenuta si ricava un'equazione di secondo grado nel parametro del fascio.

(in simboli $\mathcal{C} = \lambda\,\mathcal{C}' + \mu\,\mathcal{C}''$) che descrive il fascio di coniche generato da $\mathcal{C}'$ e $\mathcal{C}''$.

Commento. *Riguardando la (3) come retta proiettiva le coniche del fascio vengono identificate con i punti di una retta proiettiva determinata da due punti distinti appartenenti ad essa ($\mathcal{C}'$ e $\mathcal{C}''$). Si veda Figura 3.*

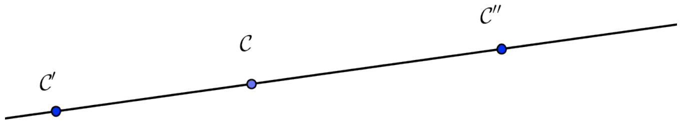

FIGURA 3. Fascio di coniche interpretato come retta proiettiva.

Le coniche degeneri si ottengono (dopo aver posto ad esempio $k = \frac{\mu}{\lambda}$, se $\lambda \neq 0$) risolvendo l'equazione, generalmente di terzo grado

$$\det(A' + kA'') = 0. \tag{4}$$

Se la (4) è identicamente soddisfatta, le coniche sono tutte *degeneri.*

Nel caso generico invece si hanno 3 coniche degeneri (nel caso l'equazione (4) sia a coefficienti reali si ha almeno una conica reale) e quindi[9] **4 punti base** attraverso i quali passano tutte le coniche.

Osservazione. Osserviamo che l'equazione di una conica (vedi la (1)) dipende da cinque parametri indipendenti, sicché cinque punti in posizione "generale" individuano una e una sola conica.

Il metodo dei fasci di coniche permette di trattare rapidamente ed elegantemente il problema di individuare una conica a partire da diverse condizioni note. *In genere è sconsigliabile sostituire le coordinate dei punti direttamente nell'equazione, perché spesso inefficace, soprattutto nel caso di condizione di tangenza, e comunque molto lungo e poco elegante.* Esaminiamo ora i vai casi che si possono presentare. Come al solito lavoreremo nel piano proiettivo complesso o nel piano reale complessificato.

Fascio per 4 punti distinti. Consideriamo 4 punti distinti A, B, C, D a tre a tre non allineati. Il fascio di coniche passante per quattro punti a tre a tre non allineati ammette tre coniche degeneri reali (si veda Figura 4) e può essere generato, ad esempio, usando due di tali coniche

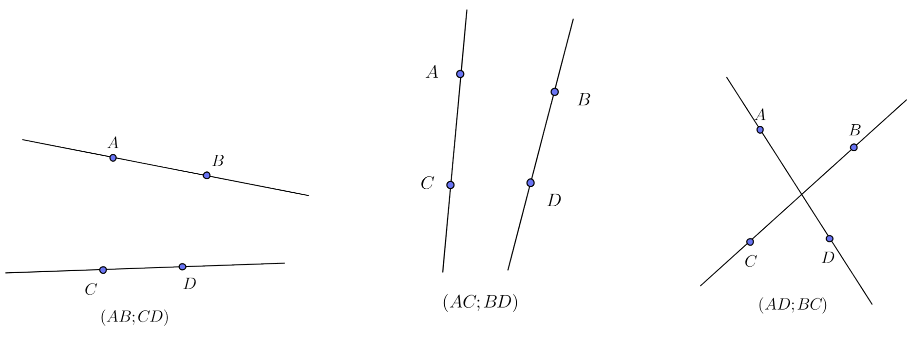

FIGURA 4. Coniche degeneri del fascio di coniche passanti per quattro punti a tre a tre non allineati.

$$\mathcal{F}:\ \lambda\mathcal{C}_1 + \mu\mathcal{C}_2 = 0, \qquad (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

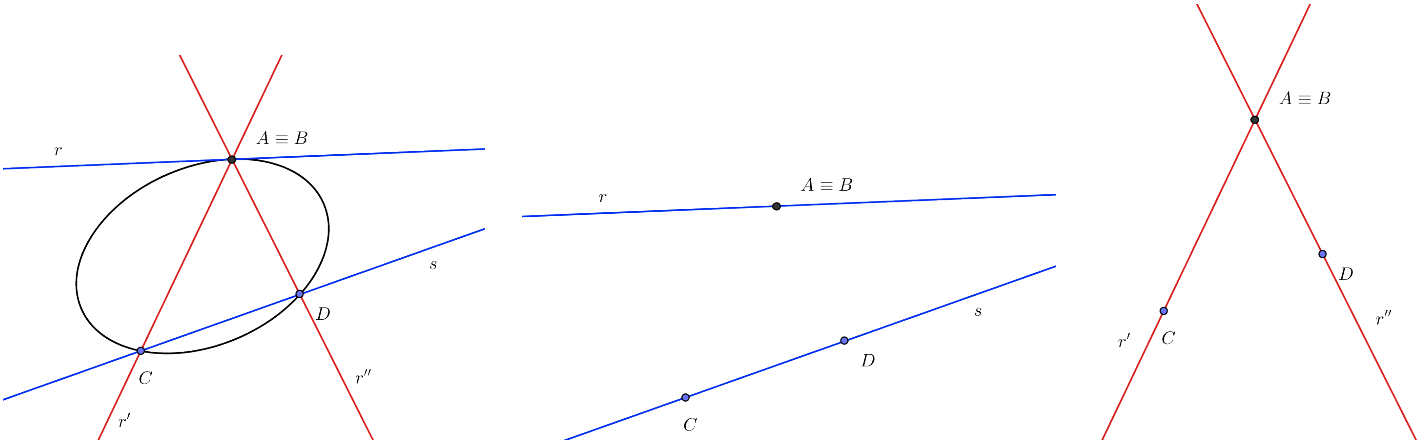

FIGURA 5. Coniche degeneri del fascio di coniche passanti per tre punti e tangenti ad una retta data.

Fascio per 3 punti e una condizione di tangenza. Consideriamo ora il fascio di coniche passanti per tre punti distinti $A \equiv B, C, D$ non allineati e tangenti ad una retta r nel punto A. Tale fascio può essere semplicemente generato dalle rette degeneri (si veda Figura 5) che in questo caso sono la coppia di rette $r' : AC$ e $r'' : AD$ e la coppia di rette r e $s : CD$. Simbolicamente si ha

$$\boldsymbol{\mathcal{F} :\ \lambda rs + \mu r'r'' = 0}$$

Fascio di coniche bitangenti. Consideriamo ora il fascio di coniche passante per due punti distinti $A \equiv B$ e $C \equiv D$ e in tali punti tangenti a due rette date r e r'. Anche in tale caso il fascio può essere facilmente descritto dalle rette degeneri (si veda Figura 6) che sono le rette r e r' stesse e la retta $s : AB$ passante per A

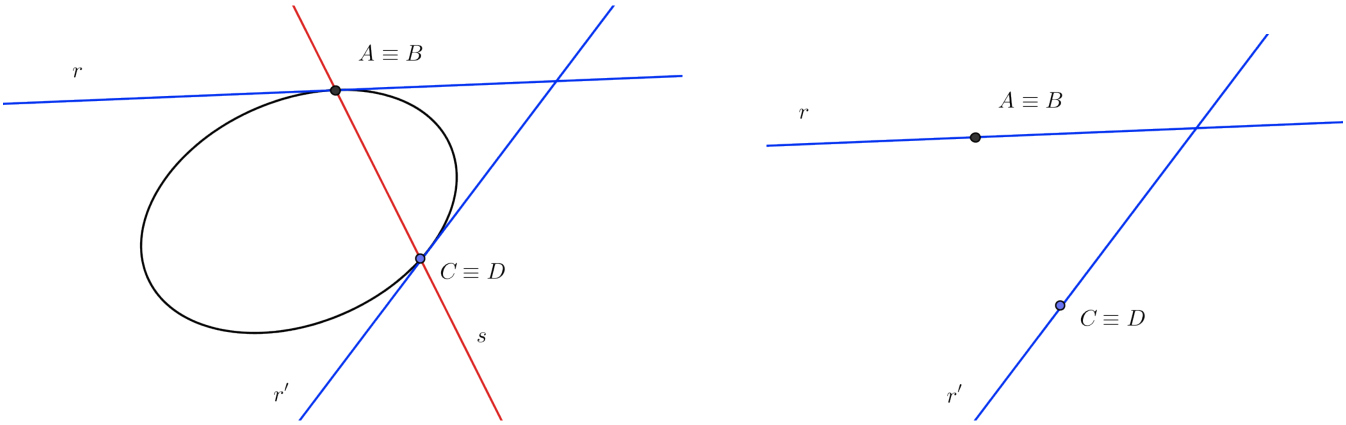

FIGURA 6. Coniche degeneri del fascio di coniche bitangenti.

e B contata però due volte. Simbolicamente

$$\boldsymbol{\mathcal{F} :\ \lambda rr' + \mu s^2 = 0}$$

7.1. **Fasci di coniche osculanti e iper–osculanti.** Lo studio di tali fasci di coniche necessita una dettagliata specificazione del processo di limite che porta i "4 punti originari" del primo caso trattato a coincidere. In questa sezione metteremo in evidenza i due casi restanti, ma non approfondiremo la tematica.

[9] Si ricordi che consideriamo il piano proiettivo reale complessificato o il piano proiettivo complesso.

- **Fascio di coniche osculantisi in un punto e passanti per un altro** In questo caso il fascio è formato dalle coniche passanti per due punti distinti $A \equiv B \equiv C$ e D e tangenti in A ad una retta data. Nel punto A si deve avere un contatto triplo.
- **Fascio di coniche iperosculantisi in un punto** In questo caso il fascio è formato dalle coniche passanti per $A \equiv B \equiv C \equiv D$ e tangenti in A ad una retta data. Nel punto A si deve avere un contatto quadruplo.

7.2. **Metodo 3 per la determinazione delle tangenti ad una conica irriducibile da $P \notin \mathcal{C}$.** Il terzo metodo per la determinazione delle tangenti condotte da un punto esterno ad una conica $\mathcal{C}$ sfrutta l'idea del fascio di coniche bitangenti.

Consideriamo le coniche degeneri $\mathcal{C}_1 : \ \tau_1\tau_2 = 0$ e $\mathcal{C}_2 : \ p^2 = 0$, in cui τ_1 e τ_2 sono le due tangenti che cerchiamo e $p : \ P_1P_2 = 0$ è la polare del punto P da cui vanno condotte le tangenti. È chiaro che *le coniche $\mathcal{C}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ appartengono allo stesso fascio di coniche bitangenti* (si veda Figura 7). Pertanto $\mathcal{C}_1 = k\,\mathcal{C}_2 + \mathcal{C}$, con k parametro affine. Analiticamente

$$0 = \underbrace{\tau_1\tau_2}_{\mathcal{C}_1} = k\,\underbrace{(X_P^TAX)^2}_{\mathcal{C}_2} + \underbrace{X^TAX}_{\mathcal{C}}.$$

Ponendo $X = X_P$ e osservando che $X_P^TAX_P \neq 0$ per ipotesi, è $k\,(X_P^TAX_P)^2 + X_P^TAX_P = 0$, da cui

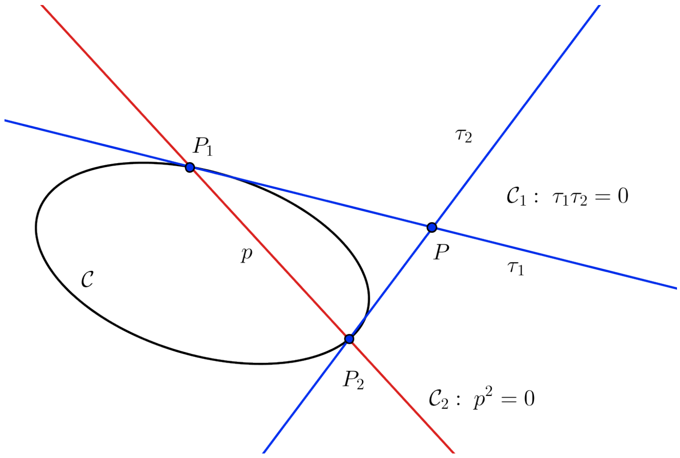

FIGURA 7. Uso del fascio di coniche bitangenti per la determinazione delle tangenti condotte da un punto P non appartenente alla conica $\mathcal{C}$.

$$k = -(X_P^TAX_P)^{-1}$$

e pertanto

$$0 = \tau_1\tau_2 = \underbrace{(X^TAX)}_{\mathcal{C}}(X_P^TAX_P) - \underbrace{(X_P^TAX)^2}_{p}$$

Il complesso delle rette tangenti cercate è quindi formato da

$$(5) \qquad \mathbf{(X^TAX)(X_P^TAX_P) - (X_P^TAX)^2 = 0}$$

Si osservi che se $P \in \mathcal{C}$ si riottiene l'equazione della tangente contata due volte.

Consideriamo ora il seguente esempio che, sebbene elementare, permette di illustrare i vari metodi per la determinazione delle tangenti ad una data conica (irriducibile) condotte da un punto esterno alla conica stessa.

Esempio 2. *Sia $\mathcal{C} : = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ una conica e $P : \ [1, 0, 2]$ un punto di $\mathbb{P}^2$. Determiniamo in tre modi differenti le equazioni delle tangenti a $\mathcal{C}$ condotte da P.*[10]

[10] Osserviamo che facendo uso di considerazione metriche il problema sarebbe triviale, ma in questo contesto prescindiamo dagli aspetti metrici.

Sol. La matrice $A_{\mathcal{C}}$ associata alla conica $\mathcal{C}$ è $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, quindi essendo $\mathfrak{a} \neq 0$, la conica $\mathcal{C}$ è irriducibile.

Metodo 1. Passiamo a coordinate affini, l'equazione della conica diviene

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

e scriviamo il fascio $\mathcal{R}$ di rette di centro di centro $P : [1, 0, 2]$:

$$\mathcal{R} : \; y - 2 = mx, \quad m \in \mathbb{R}.$$

Intersechiamo ora il fascio $\mathcal{R}$ con la conica

$$(m^2 + 1)x^2 + 4mx + 3 = 0$$

e imponiamo la condizione di tangenza, $\Delta_m = 0$

$$4m^2 - 3(m^2 + 1) = 0$$

cioè $m = \sqrt{3}$ oppure $m = -\sqrt{3}$. Da cui le tangenti cercate

$$\tau_1 : \; y = 2 + \sqrt{3}\,x, \quad \tau_2 : \; y = 2 - \sqrt{3}\,x$$

Metodo 2. Determiniamo la polare p del punto P:

$$\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

cioè

$$\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

e quindi

$$p : \; x_0 + 2x_2 = 0, \quad \text{o in coordinate affini} \quad y = \frac{1}{2}.$$

I punti di intersezione di p con la conica si ottengono risolvendo il sistema tra l'equazione di $\mathcal{C}$ e quella di p:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

e sono $P_1 : \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $P_2 : \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Le tangenti sono quindi le rette P_1P e P_2P, che sono le due rette τ_1 e τ_2 determinate sopra.

Metodo 3. Applichiamo la relazione (5).

$$\left(\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right) - \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right)^2 = 0$$

$$(-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)\,(-1 + 4) - (-x_0 + 2x_2)^2 = 0$$

$$3(x^2 + y^2 - 1) - (2y - 1)^2 = 0 \qquad \text{passando a coordinate affini}$$

$$3x^2 - (y - 2)^2 = 0$$

cioè

$$\tau_1 : \; y = 2 + \sqrt{3}\,x, \quad \tau_2 : \; y = 2 - \sqrt{3}\,x.$$